

PROPOSTA PARA AVALIAÇÃO DE MOMENTO DE FISSURAÇÃO EM PEÇAS FLETIDAS DE CONCRETO ARMADO E PROTENDIDO

Sandro Luiz Bunn¹; Angelo Rubens Migliore Junior²

¹ Engenheiro Civil, HF Projetos Ltda. / Diretor técnico

² Professor Doutor, Unifeb, Migliore & Pastore Eng. Ltda.

³ Fábio Albino de Souza, Coordenador do Curso.

Resumo

A verificação de formação de fissuras é um dos aspectos que possui especial influência na verificação de peças de concreto armado e protendido devido a sua importância na análise das tensões de tração e da proteção da armadura. Este artigo apresenta uma proposta algébrica para obtenção do momento de fissuração, baseado nas equações constitutivas do concreto a tração e a compressão e em resultados empíricos da literatura para avaliação deste momento em elementos fletidos. Os valores obtidos pelo modelo proposto ficam próximos aos obtidos pela norma ABNT NBR 6118:2014 para concretos de resistência até 50MPa e com a consideração de utilização de agregado de granito ou de gnaise. Para concretos de maior resistência ou utilização de agregados de diferentes tipos, foram obtidos desvios percentuais maiores em razão da consideração do valor do módulo de deformação do concreto no modelo proposto. No entanto, é possível considerar o efeito do tipo de agregado segundo uma relação não linear também aqui proposta. Adicionalmente nota-se o efeito benéfico da incorporação de armaduras ativas (concreto protendido) com aumento considerável da resistência à fissuração.

Palavras chave: concreto fissurado, momento de fissuração.

Abstract

The verification of crack formation is one of the aspects that has special influence on the verification of reinforced concrete parts and proceeded due to their importance in the analysis of stress tension and armor protection. This article presents an algebraic proposal to obtain the cracking moment, based on the constitutive equations of concrete tension and compression and empirical results of the literature to evaluate this moment in flexed elements. The values obtained by the proposed model are close to those obtained by ABNT NBR 6118:2014 for resistance concrete up 50MPa and with consideration of the use of granite or gnaise aggregate. For concrete of higher strength or use of aggregates of different types, higher percentage deviations were obtained due to the consideration of the value of the concrete deformation module in the proposed model. However, it is possible to consider the effect of the type of aggregate according to a nonlinear relationship also proposed here. Additionally, the beneficial effect of the incorporation of active reinforcements (prestressed concrete) is noted with a considerable increase in cracking resistance.

Key words: cracked concrete, cracking bend

Introdução

A avaliação do Estado Limite de Formação de Fissuras (ELS-F) possui importância por envolver a durabilidade e a longevidade de uma obra de concreto. Em particular para as estruturas de concreto protendido, o surgimento de fissuras é mais prejudicial, pois os aços de protensão sofrem processo de corrosão acelerado quando tensionados e expostos em contato com agentes agressivos como umidade, oxigênio, introdução de gases e deposição de sais. Com intuito de promover adequada proteção da armadura protendida, a norma ABNT NBR 6118:2014 estabelece limites de tensões de tração no ELS-F, a partir de coeficientes empíricos e convencionais para seções transversais retangulares, T e I, entre outros coeficientes de norma.

Para outras formas geométricas, nem sempre é possível definir o coeficiente adequado para certas situações. O uso de um modelo proposto que considere geometrias não padronizadas pode contribuir para obtenção do valor do momento resistente que corresponde ao início da formação de fissuras. Por outro lado, as prescrições normativas não consideram o tipo de agregado do concreto na determinação do início da fissuração, tal como será aqui considerado.

Parâmetros de avaliação de ELS-F

O item 17.3.1 da norma ABNT NBR 6118:2014 define o ELS-F como o estado em que inicia a formação de fissuras, quando da ocorrência de tensão de tração elástica na seção transversal de valor igual ao da resistência à tração na flexão $f_{ct,f}$. A expressão simplificada apresentada para a avaliação do momento de fissuração M_r é:

$$W_i = \frac{I_c}{y_{CG}}$$
$$M_r = \alpha_F \cdot \gamma_t \cdot f_{ct} \cdot W_i \quad \text{Eq. (1)}$$

onde M_r é o momento de fissuração; α_F é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência a tração na flexão $f_{ct,f}$ com a resistência à tração direta; f_{ct} é a resistência à tração direta do concreto; W_i é o módulo resistente para a borda inferior da peça; I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto; y_{CG} é a distância do centro geométrico da seção à borda mais tracionada; γ_t é o fator de redução da tensão de tração média para a tensão de tração inferior e definido como sendo 0,7 para o ELS-F e 1,0 para o ELS-DEF e ELS-W;

Os valores adotados pela norma ABNT NBR 6118:2014 para α_F são 1,2 para seções T; 1,3 para seções I ou T invertido e 1,5 para seções retangulares.

A Eq. (1) representa o caso particular de concreto armado. No caso da utilização de protensão, deve ainda ser considerado o efeito da pré-compressão no cálculo do momento de fissuração, acrescentado o valor do momento de descompressão M_0 com a expressão:

$$M_0 = \gamma_P \cdot \sigma_P \cdot W_i \quad \text{Eq. (2)}$$

onde γ_P é o fator de redução definido como sendo 0,9; σ_P é a tensão na borda tracionada pelo carregamento externo e causada pela protensão, consideradas todas as perdas.

A expressão para o momento de fissuração M_r para peças com protensão resulta em:

$$M_r = \alpha_F \cdot \gamma_t \cdot f_{ct} \cdot W_i + \gamma_P \cdot \sigma_P \cdot W_i \quad \text{Eq. (3)}$$

Adicionalmente, a norma ABNT NBR 6118:2014 também define as expressões seguintes, válidas para concretos até classe C50, para a resistência à tração do concreto f_{ctk} e para o módulo de deformação tangente inicial do concreto E_{ci} :

$$f_{ctk} = 0,3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2} \text{ (MPa)} \quad \text{Eq. (4)}$$

$$E_{ci} = \alpha_e \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \text{ (MPa)} \quad \text{Eq. (5)}$$

Os valores adotados pela citada norma para α_e são 1,2 para basalto e diabásio; 1,0 para granito e gnaise; 0,9 para calcário; 0,7 para arenito.

Modelo proposto

Para a tensão de compressão no concreto será considerada a equação do trecho parabólico do diagrama tensão-deformação da norma ABNT NBR 6118:2014 e apresentado na Figura 1a que será utilizada neste texto para avaliar peças de concreto no ELS. Para a resistência à tração do concreto, serão consideradas as relações do diagrama tensão-deformação da mesma norma e apresentadas na Figura 1b.

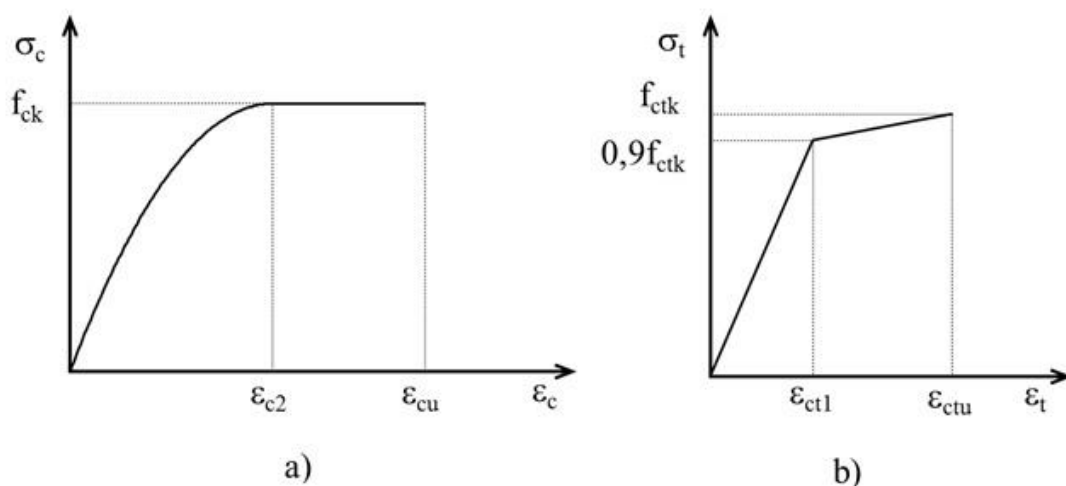


Figura 1 – Diagramas tensão-deformação do concreto. a) Compressão e b) Tração
Fonte: adaptado da ABNT NBR 6118 (2014).

Neste texto, tensões de compressão são consideradas com sinal negativo, resultando na expressão abaixo:

$$\sigma_c = -f_{ck} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right] \text{ para } \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \quad \text{Eq. (6)}$$

onde f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto; ϵ_c é a deformação específica de encurtamento do concreto, expresso em ‰; ϵ_{c2} é a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico e igual a 2‰ para concretos com resistência à compressão de até 50 MPa.

A equação para o diagrama bi-linear da tensão de tração pode ser expressa por:

$$\sigma_t = f \cdot \varepsilon_t + g \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{para } 0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{ct1} \rightarrow f = E_{ci}; g = 0 \\ \text{para } \varepsilon_t \geq \varepsilon_{ct1} \rightarrow f = \frac{0,1}{\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ct1}} \cdot f_{ctk}; g = \left(1 - \frac{0,1 \cdot \varepsilon_{ctu}}{\varepsilon_{ctu} - \varepsilon_{ct1}}\right) \cdot f_{ctk} \end{array} \right\} \text{Eq. (7)}$$

onde E_{ci} é o módulo de deformação tangente inicial do concreto; f_{ctk} é a resistência à tração direta do concreto; ε_t é a deformação específica de alongamento do concreto, expressa em ‰; $\varepsilon_{ct1} = 0,9 \cdot f_{ctk} / E_{ci}$ é a deformação específica no início da plastificação por alongamento do concreto, expressa em ‰ e ε_{ctu} é a deformação última convencional de alongamento do concreto. Neste texto será adotado $\varepsilon_{ctu} = 0,2\text{‰}$ (o que equivale a aproximadamente $0,15\text{‰}/\gamma_t$) para compatibilização de resultados obtidos, apesar do valor sugerido de $0,15\text{‰}$ na norma ABNT NBR 6118:2014.

Langendonck (1944) apresentou resultados experimentais de vigas fletidas com seção transversal retangular para o valor da máxima tensão de compressão no concreto σ_c e a máxima tensão de tração σ_t na borda oposta, ambas tensões obtidas na condição de formação de fissuras. Aqueles valores experimentais da relação $|\sigma_c/\sigma_t|$ variaram entre 1,7 e 2,6 com médias entre 2,0 e 2,1. Moersch (1909) também apresentou tal relação e cita que o agregado graúdo utilizado para o concreto foi granito. Neste texto, será considerado inicialmente o agregado de granito com $\alpha_e = 1,0$ na Eq. (5).

O modelo proposto determina as resultantes de compressão e de tração no concreto, desprezando a presença da armadura, utilizando as Eq.(6) e (7) e considerando o caso geral de seção que pode ser discretizada por segmentos com formato trapezoidal, tal como esquematizado na Figura 2.

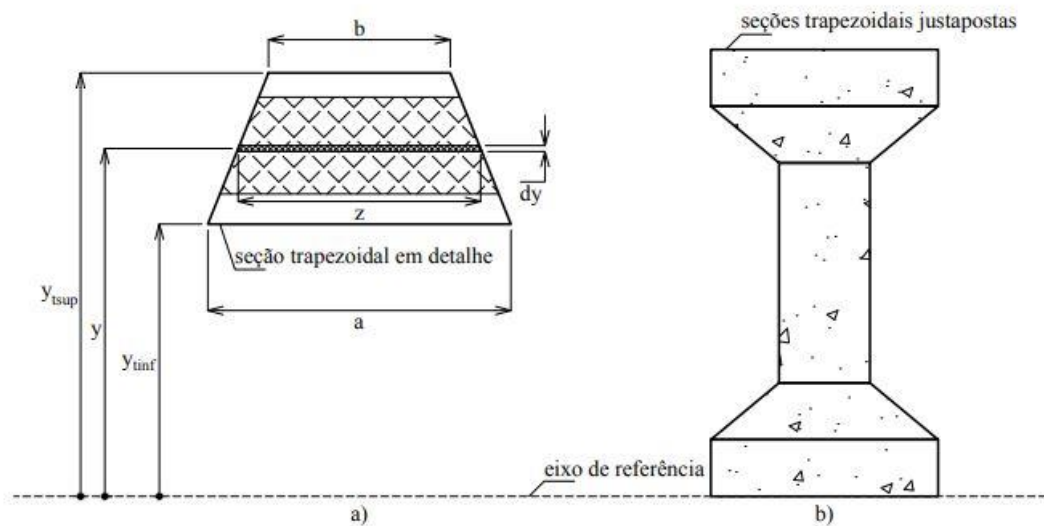


Figura 2 – Discretização da seção transversal. a) Detalhe de trapézio e b) Justaposição.
Fonte: autores

A solução para peças com geometrias diferenciadas pode ser obtida pela justaposição de seções trapezoidais apresentada na Figura 2b, com análise individual de cada parte e sobreposição dos efeitos estáticos. As equações gerais para variação da largura de uma seção trapezoidal em função da sua geometria e posição da resultante de tensão em relação a um eixo de referência fixo na face inferior da peça ficam assim determinadas:

$$\begin{aligned}
z &= j \cdot y + k; \\
j &= \frac{b-a}{y_{tsup}-y_{tinf}}; \\
k &= a - j \cdot y_{tinf};
\end{aligned}
\tag{Eq. (8)}$$

onde z é a largura da seção trapezoidal na ordenada y ; y_{tsup} é a posição do topo da seção trapezoidal; y_{tinf} é a posição da base da seção trapezoidal; a é a largura da base da seção trapezoidal; b é a largura do topo da seção trapezoidal.

As equações fundamentais para obtenção da tensão de compressão no concreto em cada posição vertical y , a resultante das tensões em cada trapézio e o momento estático da resultante em relação a um eixo de referência indicado na Figura 3 são:

$$\begin{aligned}
\sigma_c &= \frac{-f_{ck}}{(y_2 - y_{LN})^2} \cdot [y_{LN} \cdot (y_{LN} - 2y_2) + y \cdot (2y_2 - y)] y_2; \\
R_c &= \int_{y_i}^{y_s} \sigma_c \cdot z \cdot dy; \\
yR_c &= \int_{y_i}^{y_s} \sigma_c \cdot z \cdot y \cdot dy;
\end{aligned}
\tag{Eq. (9)}$$

onde y_{LN} é a ordenada onde $\varepsilon_c=0\text{‰}$ ($\sigma_c=0,0$); y_2 é a ordenada onde $\varepsilon_c=2\text{‰}$ ($\sigma_c=-f_{ck}$); y_s é o limite superior de análise da equação, ou seja, o mínimo valor entre y_{tsup} e y_2 (para tensões de compressão); y_i é o limite inferior de análise da equação, ou seja, o máximo valor entre y_{tinf} e y_{LN} (para tensões de compressão).

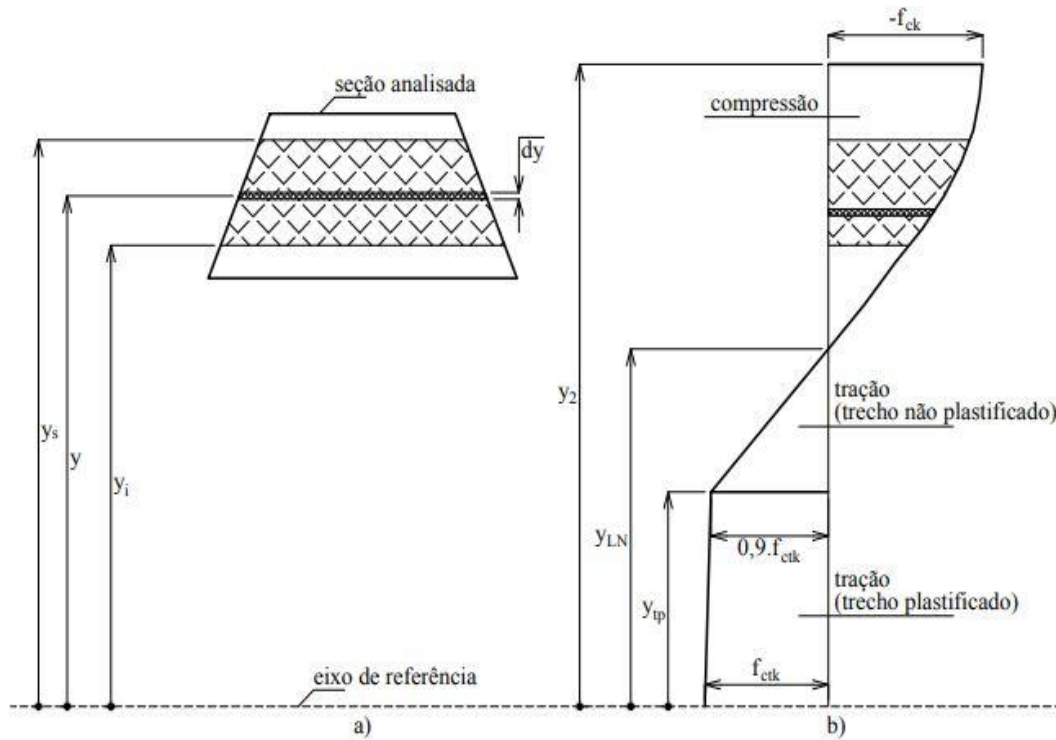


Figura 3 – Representação esquemática de tensões. a) Resultante em cada trapézio e b) Diagrama de tensões.

Fonte: autores

Desenvolvendo as relações fundamentais, substituindo a tensão de compressão no concreto e simplificando, obtém-se:

$$R_c = \frac{-f_{ck}}{(y_2 - y_{LN})^2} \left\{ [y_{LN} \cdot (y_{LN} - 2 \cdot y_2) \cdot k \cdot (y_s - y_i)] + \right. \\ \left. (2 \cdot y_2 \cdot j - k) \cdot \left(\frac{y_s^3 - y_i^3}{3} \right) - j \cdot \left(\frac{y_s^4 - y_i^4}{4} \right) \right\} \quad \text{Eq. (10)}$$

$$yR_c = \frac{-f_{ck}}{(y_2 - y_{LN})^2} \left\{ [y_{LN} \cdot (y_{LN} - 2 \cdot y_2) \cdot k \cdot \frac{(y_s - y_i)^2}{2}] + \right. \\ \left. (2 \cdot y_2 \cdot j - k) \cdot \left(\frac{y_s^4 - y_i^4}{4} \right) - j \cdot \left(\frac{y_s^5 - y_i^5}{5} \right) \right\} \quad \text{Eq. (11)}$$

$$y_{Rc} = \frac{yR_c}{R_c} \quad \text{Eq. (12)}$$

De modo semelhante, as relações fundamentais para obtenção da tensão de tração no concreto, sua resultante em cada trapézio e o momento estático da resultante em relação a um eixo de referência são:

$$\sigma_t = f \cdot y + g; \\ R_t = \int_{y_i}^{y_s} \sigma_t \cdot z \cdot dy; \\ yR_t = \int_{y_i}^{y_s} \sigma_t \cdot z \cdot y \cdot dy; \quad \text{Eq. (13)}$$

onde y_{tp} é a ordenada onde $\varepsilon_t = \varepsilon_{ct1}$ ($\sigma_t = 0,9 \cdot f_{ctk}$); y_s é o mínimo valor entre y_{tsup} e y_{LN} , no trecho não plastificado do diagrama de tração, ou o mínimo valor entre y_{tsup} e y_{tp} no trecho plastificado; y_i é o máximo valor entre y_{tinf} e y_{tp} , no trecho não plastificado do diagrama de tração, ou assume o valor de y_{tinf} no trecho plastificado.

Desenvolvendo, substituindo a tensão de tração e simplificando, resultam as relações:

$$R_t = j \cdot f \cdot \frac{(y_s^3 - y_i^3)}{3} + (j \cdot g + k \cdot f) \cdot \frac{(y_s^2 - y_i^2)}{2} + k \cdot g \cdot (y_s - y_i) \quad \text{Eq. (14)}$$

$$yR_t = j \cdot f \cdot \frac{(y_s^4 - y_i^4)}{4} + (j \cdot g + k \cdot f) \cdot \frac{(y_s^3 - y_i^3)}{3} + k \cdot g \cdot \frac{(y_s^2 - y_i^2)}{2} \quad \text{Eq. (15)}$$

$$y_{Rt} = \frac{yR_t}{R_t} \quad \text{Eq. (16)}$$

onde R_t é a resultante de tração no concreto e y_{Rt} é a ordenada da resultante de tração no concreto.

Impondo as condições de equilíbrio das resultantes na Flexão Simples para n seções justapostas representadas na Figura 4 e admitindo conhecida a posição da Linha Neutra da seção transversal x_{LN} , a partir da Hipótese de Bernoulli de que a seção plana deformada deve permanecer plana, podem ser obtidas as relações:

$$\sum F = \sum_{i=0}^{i=n} [R_{ci} + R_{ti}] = 0 \quad \text{Eq. (17)}$$

$$M_{r-calc} = \sum_{i=0}^{i=n} [R_{ci}(y_{LN} - y_{Rci}) + R_{ti}(y_{LN} - y_{Rti})] \quad \text{Eq. (18)}$$

onde M_{r-calc} é o momento de fissuração calculado em relação ao eixo neutro y_{LN} .

Comparando as Eqs. (1) e (14) é possível obter um valor calculado para o coeficiente de forma a partir de M_{r-calc} :

$$\alpha_{F-calc} = \frac{M_{r-calc}}{f_{ctk} \cdot W_i} \quad \text{Eq. (19)}$$

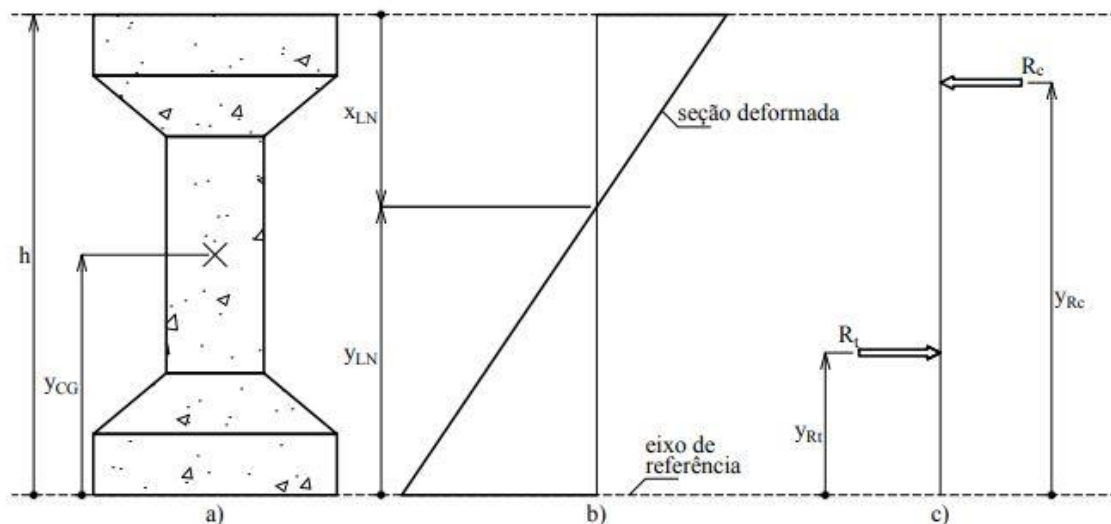


Figura 4 – Representação esquemática de resultantes. a) Seção analisada, b) Seção deformada e c) Resultantes de compressão e tração com ordenadas de aplicação.

Fonte: autores

Valores obtidos a partir do modelo proposto para seção retangular

Para avaliação do modelo proposto foi considerada uma seção de concreto retangular de dimensões de $30 \times 90 \text{ cm}^2$, agregado de granito, resistência de concreto $f_{ck}=20$ até 50 MPa cujos dados iniciais estão apresentados na Tabela 1. Com auxílio de planilha eletrônica desenvolvida pelo autor para resolução das equações de equilíbrio através de processo iterativo com uso do método de Newton-Raphson, com tolerância de $\pm 0,4$ para $\Sigma F=0$, foram obtidos valores para a relação $|\sigma_c/\sigma_t|$ variando entre 1,75 e 1,98. Os valores obtidos no modelo para M_{r-calc} foram comparados com os valores de M_r , calculado conforme a Eq. (1). Considerando que as diferenças percentuais encontradas entre os valores de $\gamma_t \cdot M_{r-calc}$ e M_r variaram de -1,6% até +2,8% foi assumido que o modelo proposto é compatível para seções retangulares com agregado de granito, considerando os resultados experimentais indicados por Moersch (1909).

A rotina de cálculo para obtenção do valor de M_{r-calc} consiste em arbitrar um valor inicial para y_{LN} , geralmente faz-se $y_{LN}=y_{CG}$, obtendo-se assim as resultantes de compressão e tração com seus respectivos pontos de aplicação através das Eq.(10) até Eq.(16). Na sequência é verificada a condição de equilíbrio da Eq.(17). Como as tensões não são linearmente proporcionais às deformações resulta que a posição de equilíbrio é $y_{LN}>y_{CG}$ e a primeira tentativa resulta em $\Sigma F<0$. Posteriormente é arbitrado um valor maior que o anterior para y_{LN} , enquanto $\Sigma F<0$, ou um valor menor para y_{LN} quando $\Sigma F>0$, até se atingir $\Sigma F=0(\text{kN})$.

Finalmente se obtém o valor da Eq.(18) para o momento de fissuração no modelo proposto, sem a redução por γ_t .

Os valores de E_{ci} e f_{ctk} indicados na Tabela 1 foram calculados pela Eq.(5) e pela Eq.(4), respectivamente. Os valores previstos para M_r pela Eq. (1) são diretamente proporcionais ao valor de f_{ctk} , para uma certa seção transversal e independentes de E_{ci} . No entanto, a variação da tensão de tração está relacionada diretamente com o valor de E_{ci} , conforme a Eq. (7) e a Figura 1b), resulta em diferenças maiores na penúltima linha da Tabela 1 quando o valor de E_{ci} é alterado.

É importante observar que a posição do centróide da seção bruta de concreto está posicionada a $0,5h$ nas seções retangulares, a qual difere para as posições relativas da Linha Neutra x_{LN}/h indicadas na Tabela 1. Os resultados da Tabela 1 também indicam que a posição da Linha Neutra se aproxima do topo quando aumenta a resistência à compressão do concreto. Isto se justifica quando é assumido que a resistência à tração do concreto possui variação não linear com potência de 2/3 em relação à resistência à compressão, para concretos de até 50 MPa. Nota-se ainda que a posição da y_{LN} não coincide com y_{CG} da seção bruta de concreto em razão da não linearidade assumida entre deformação e tensão.

**Tabela 1 – Valores obtidos para M_r e M_{r-calc} , seção retangular 30x90cm² e $\alpha_e=1,0$.
Fonte: autores**

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
E_{ci} (GPa)	25,0	28,0	30,7	33,1	35,4	37,6	39,6
f_{ctk} (MPa)	2,21	2,56	2,90	3,21	3,51	3,80	4,07
$ \sigma_c/\sigma_t $	1,75	1,81	1,85	1,89	1,92	1,95	1,98
x_{LN}/h	0,481	0,470	0,461	0,454	0,447	0,442	0,437
α_F	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
M_r (kN.cm)	9.400	10.908	12.317	13.650	14.921	16.140	17.315
M_{r-calc} (kN.cm)	13.211	15.516	17.685	19.739	21.709	23.610	25.436
$\gamma_t.M_{r-calc}$ (kN.cm)	9.248	10.861	12.380	13.817	15.197	16.527	17.805
$\gamma_t.M_{r-calc}/M_r$	-1,6%	-0,4%	0,5%	1,2%	1,8%	2,4%	2,8%
α_{F-calc}	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54	1,54

A Tabela 2 apresenta valores encontrados para seção retangular de dimensões 30x90cm², considerando quatro tipos de agregados segundo a norma ABNT NBR 6118:2014. Nota-se que o valor de M_{r-calc} sofre influência do tipo do agregado utilizado através de E_{ci} , enquanto M_r não se altera para uma mesma seção e f_{ck} . Quando é alterado o valor de E_{ci} , seja pelo aumento do f_{ctk} ou mudança do tipo de agregado (α_e) é esperado que ocorra um comportamento que tenda a acompanhar esta variação do módulo de deformação do concreto. A Tabela 2 e a Figura 5 apresentam a influência da consideração da rigidez do agregado através do valor α_e variando entre 0,7 e 1,2.

No gráfico da Figura 5, a legenda utilizada é: Mr20 são os valores de $\gamma_t.M_{r-calc}$, calculados para $f_{ck}=20$ MPa; Mr25 com $f_{ck}=25$ MPa e assim sucessivamente até Mr50.

Tabela 2 – Valores obtidos para seção retangular 30x90cm² com diferentes agregados.
Fonte: autores (2018)

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
E_{ci} (GPa)							
$\alpha_e=0,7$	17,5	19,6	21,5	23,2	24,8	26,3	27,7
$\alpha_e=0,9$	22,5	25,2	27,6	29,8	31,9	33,8	35,6
$\alpha_e=1,0$	25,0	28,0	30,7	33,1	35,4	37,6	39,6
$\alpha_e=1,2$	30,1	33,6	36,8	39,8	42,5	45,1	47,5
f_{ctk} (MPa)	2,21	2,56	2,90	3,21	3,51	3,80	4,07
$ \sigma_c/\sigma_t $							
$\alpha_e=0,7$	1,64	1,69	1,73	1,76	1,78	1,81	1,83
$\alpha_e=0,9$	1,72	1,78	1,82	1,85	1,89	1,91	1,94
$\alpha_e=1,0$	1,75	1,81	1,85	1,89	1,92	1,95	1,98
$\alpha_e=1,2$	1,79	1,85	1,90	1,94	1,97	2,00	2,03
α_F	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
M_r (kN.cm)	9.400	10.908	12.317	13.650	14.921	16.140	17.315
$\gamma_t.M_{r-calc}$ (kN.cm)							
$\alpha_e=0,7$	8.650	10.116	11.486	12.774	14.001	15.175	16.299
$\alpha_e=0,9$	9.103	10.681	12.162	13.566	14.913	16.200	17.442
$\alpha_e=1,0$	9.248	10.861	12.380	13.817	15.197	16.527	17.805
$\alpha_e=1,2$	9.456	11.116	12.681	14.174	15.601	16.978	18.306
$\gamma_t.M_{r-calc}/M_r$							
$\alpha_e=0,7$	-8,0%	-7,3%	-6,7%	-6,4%	-6,2%	-6,0%	-5,9%
$\alpha_e=0,9$	-3,2%	-2,1%	-1,3%	-0,6%	-0,1%	0,4%	0,7%
$\alpha_e=1,0$	-1,6%	-0,4%	0,5%	1,2%	1,8%	2,4%	2,8%
$\alpha_e=1,2$	0,6%	1,9%	3,0%	3,8%	4,6%	5,2%	5,7%
α_{F-calc}							
$\alpha_e=0,7$	1,38	1,39	1,40	1,40	1,41	1,41	1,41
$\alpha_e=0,9$	1,45	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51
$\alpha_e=1,0$	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54	1,54
$\alpha_e=1,2$	1,51	1,53	1,54	1,56	1,57	1,58	1,59

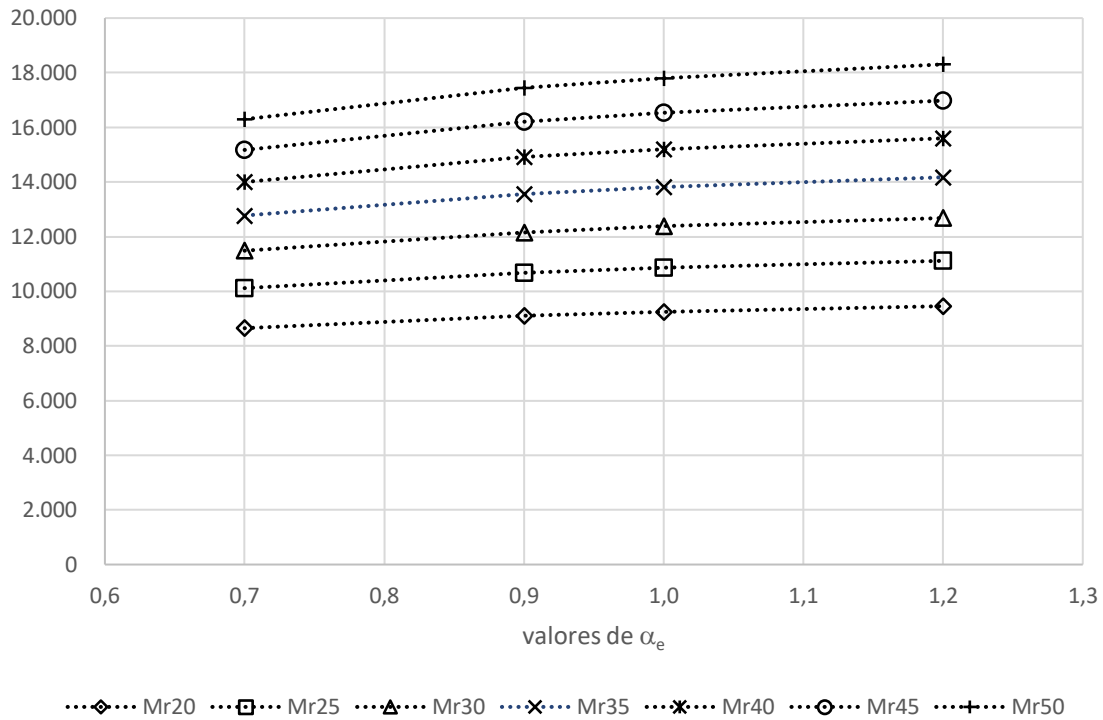


Figura 5 – Momentos de fissuração obtidos para seção retangular 30x90cm², $\gamma_t=0,7$, com variação de f_{ck} e α_e .
Fonte: autores

Como pode ser observado na Figura 5, o momento de fissuração calculado é proporcional ao tipo do agregado (α_e) e, portanto, podem ser propostas equações para estimar os valores de α_{F-calc} e $\gamma_t.M_{r-calc}$ em função de α_e , como simplificação do modelo proposto para o caso de seções retangulares. Com tratamento matemático para ajuste dos valores da Tabela 2 são propostas as seguintes relações:

$$\alpha_{F-est} = \alpha_e^{0,2} \cdot \alpha_F \quad \text{Eq.(20)}$$

$$M_{r-est} = \alpha_e^{0,2} \cdot M_r \quad \text{Eq.(21)}$$

onde α_{F-est} é a estimativa de α_{F-calc} em função do tipo de agregado e do fator de forma e M_{r-est} é a estimativa de $\gamma_t.M_{r-calc}$ em função do tipo de agregado e de M_r .

A Tabela 3 apresenta os valores para as relações α_{F-calc}/α_F e α_{F-est}/α_F considerando a seção 30x90cm², sendo que foram obtidas diferenças entre -8,0% e 5,7% para a relação α_{F-calc}/α_F , enquanto a relação α_{F-est}/α_F indica diferenças de -6,9% até 3,7%. As mesmas relações de diferenças percentuais indicadas para α_{F-est}/α_F se aplicam para M_{r-est}/M_r .

Tabela 3 – Estimativa de α_{F-est} para seção retangular 30x90cm² com diferentes agregados.
Fonte: autores

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
α_F	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
α_{F-calc}							
$\alpha_e=0,7$	1,38	1,39	1,40	1,40	1,41	1,41	1,41
$\alpha_e=0,9$	1,45	1,47	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51
$\alpha_e=1,0$	1,48	1,49	1,51	1,52	1,53	1,54	1,54
$\alpha_e=1,2$	1,51	1,53	1,54	1,56	1,57	1,58	1,59
α_{F-est}							
$\alpha_e=0,7$	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40	1,40
$\alpha_e=0,9$	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47	1,47
$\alpha_e=1,0$	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50	1,50
$\alpha_e=1,2$	1,56	1,56	1,56	1,56	1,56	1,56	1,56
α_{F-calc}/α_F							
$\alpha_e=0,7$	-8,0%	-7,3%	-6,7%	-6,4%	-6,2%	-6,0%	-5,9%
$\alpha_e=0,9$	-3,2%	-2,1%	-1,3%	-0,6%	-0,1%	0,4%	0,7%
$\alpha_e=1,0$	-1,6%	-0,4%	0,5%	1,2%	1,8%	2,4%	2,8%
$\alpha_e=1,2$	0,6%	1,9%	3,0%	3,8%	4,6%	5,2%	5,7%
α_{F-est}/α_F							
$\alpha_e=0,7$	-6,9%	-6,9%	-6,9%	-6,9%	-6,9%	-6,9%	-6,9%
$\alpha_e=0,9$	-2,1%	-2,1%	-2,1%	-2,1%	-2,1%	-2,1%	-2,1%
$\alpha_e=1,0$	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
$\alpha_e=1,2$	3,7%	3,7%	3,7%	3,7%	3,7%	3,7%	3,7%

Exemplo numérico de aplicação do modelo proposto em seção de concreto, sem consideração da contribuição de armadura.

A título de ilustração da aplicação do modelo proposto neste texto, é apresentada a resolução numérica para o caso particular de geometria de seção transversal em forma de T apresentada na Figura 6 com $b_w=30\text{cm}$; $h=90\text{cm}$; $b_f=90\text{cm}$; $h_f=20\text{cm}$; $I_c=2880192,3\text{cm}^4$; $W_i=51644,8\text{cm}^3$; $f_{ck}=30\text{MPa}$; $E_{ci}=30,7\text{GPa}$; $f_{ctk}=2,90\text{MPa}$; $\alpha_F=1,2$ (item 17.3.1 da ABNT NBR 6118:2014, utilizado no cálculo de M_r na Eq.(1)); $y_{CG}=55,8\text{cm}$ e $\alpha_e=1,0$.

O momento de fissuração previsto pela Eq. (1) é:

$$M_r = \frac{1,2 \cdot 0,7 \cdot 0,29 \cdot 2880192,3}{55,8} = 12.574 \text{ kN.cm} \quad \text{Eq. (22)}$$

A resolução do equilíbrio das resultantes de tensão indicadas pela Eq. (14) e considerando variação linear para a deformação das fibras de concreto, é obtida por tentativas fazendo variar a posição de linha neutra y_{LN} até obter $x_{LN}=30,5\text{cm}$, utilizando as Eqs. (10) até (16).

Em particular, a partir da Eq. (10) são obtidas a resultantes de compressão no concreto $R_{c1}=-364,9\text{kN}$ e $R_{c2}=-16,5\text{kN}$ acima da posição da mesa e abaixo desta, avançando pela alma e a partir da Eq. (12) são obtidas as posições destas resultantes como sendo $y_{Rc1}=81,6\text{cm}$ e $y_{Rc2}=66,5\text{cm}$. De modo semelhante, são obtidas as resultantes de tração no concreto no trecho acima e abaixo da região de plastificação pela Eq. (14) como sendo $R_{t1}=98,8\text{kN}$ e $R_{t2}=282,7\text{kN}$, bem como a posição destas resultantes pela Eq. (16), resultando em $y_{Rt1}=42,7\text{cm}$ e $y_{Rt2}=16,8\text{cm}$. Finalmente a partir da Eq. (18) é obtido o momento de fissuração segundo o modelo apresentado neste texto como sendo:

$$M_{r-calc} = [-364,9 \cdot (59,5 - 81,6) - 16,5 \cdot (59,5 - 66,5) + 98,8 \cdot (59,5 - 42,7) + 282,7 \cdot (59,5 - 16,8)]$$

$$M_{r-calc} = 21.909\text{kN.cm}$$

$$\gamma_t.M_{r-calc} = 0,7.21909 = 15.336\text{kN.cm}$$

Para o caso particular aqui apresentado, a diferença entre as previsões de $\gamma_t.M_{r-calc}$ e M_r é de 22,0%, ou seja, o valor para α_{F-calc} seria obtido pela Eq. (15) como sendo:

$$\alpha_{F-calc} = \frac{M_{r-calc}}{f_{ctk} \cdot W_i} = \frac{21909}{0,29.51644,8} = 1,46$$

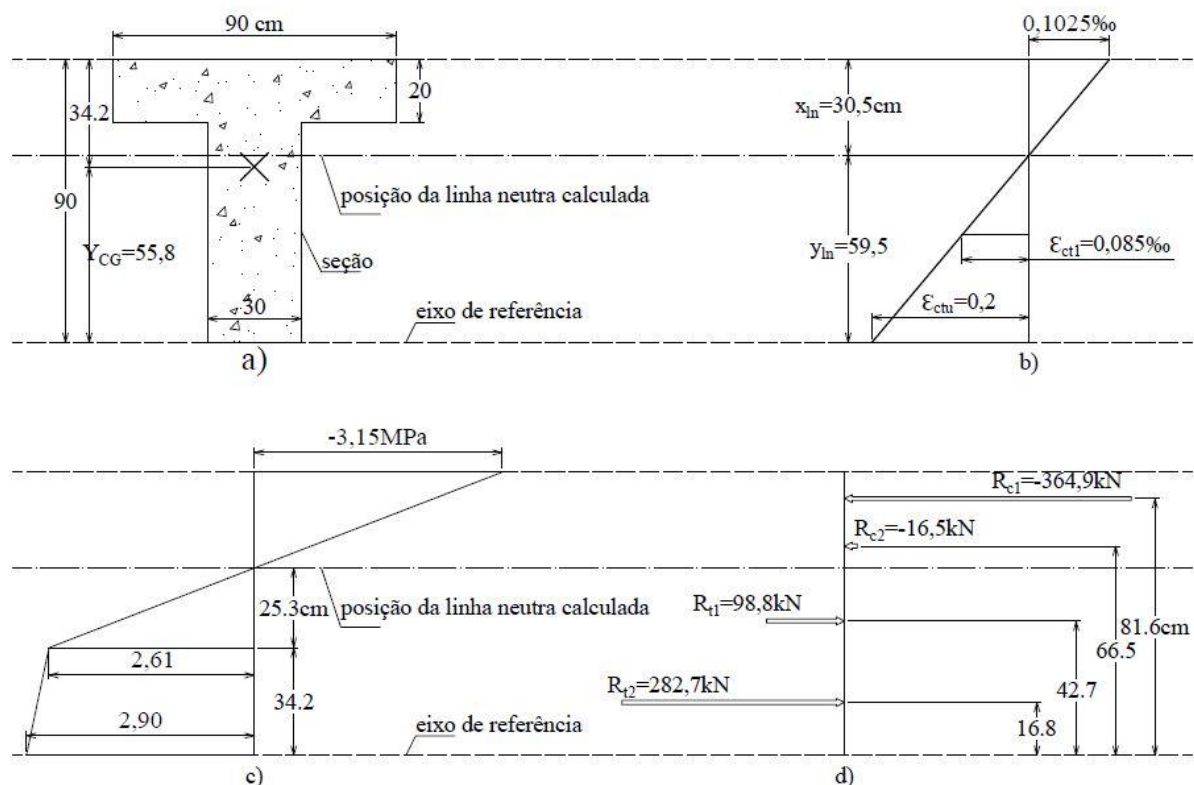


Figura 6 – Esquema de representação dos resultados do exemplo numérico. a) Seção (cm), b) Deformação (%), c) Tensões (MPa) e d) Resultantes de compressão e tração (kN)

Fonte: autores

Pode ser observado na Figura 6 que a representação das tensões de compressão é praticamente linear, porém a equação constitutiva para tensões de compressão consideradas neste trecho é de formato parabólico, em conformidade com a Eq.(5). Devido às deformações de compressão serem pequenas nas condições do ELS-F, o trecho do diagrama parabólico se aproxima de uma reta, de forma que pode ser adotada variação linear neste trecho como simplificação para cálculo de R_c , com pequena diferença de precisão. Outra peculiaridade é que o diagrama de tensão de compressão (para pequenas deformações) se comporta como se fosse uma continuidade do diagrama de tração (trecho linear não plastificado). Este comportamento é coerente com a consideração de que tanto as tensões de compressão quanto as tensões de tração devem ser proporcionais ao módulo de deformação tangente inicial E_{ci} no caso do ELS-F, pois admite-se que as tensões estão na fase do regime elástico linear.

Efeito de forma da seção transversal

A aplicação do modelo proposto para seção transversal em forma de T com mesa comprimida permite observar maiores diferenças entre os valores previstos para M_r e M_{r-calc} quando é variada a proporção entre a geometria. As Tabelas 4, 5 e 6 apresentam a posição relativa da Linha Neutra x_{LN}/h , a relação entre tensões de compressão e de tração nas bordas da seção $|\sigma_c/\sigma_t|$ e o coeficiente de forma calculado α_{F-calc} , respectivamente. As relações indicadas foram obtidas através do modelo proposto para seções T, considerando $f_{ck}=30\text{MPa}$, $E_{ci}=30,7\text{GPa}$, $f_{ctk}=2,90\text{MPa}$, $\alpha_e=1,0$ e segundo a relação entre b_f e b_w .

Nas Tabelas 4 até 6, h é altura total da seção T; h_f é a altura da mesa; b_w é largura da alma; b_f é largura da mesa; $\beta=h/h_f$ é a relação geométrica entre as alturas total e da mesa; $\gamma=b_f/b_w$ é a relação geométrica entre as larguras da mesa e de alma.

**Tabela 4 – Relações x_{LN}/h obtidas com o modelo proposto para seção T com geometria variável, $f_{ck}=30\text{MPa}$, $E_{ci}=30,7\text{GPa}$, $f_{ctk}=2,90\text{MPa}$ e $\alpha_e=1,0$.
Fonte: autores**

$\gamma \backslash \beta$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	0,461	0,461	0,461	0,461	0,461	0,461	0,461	0,461	0,461
1,5	0,461	0,425	0,406	0,393	0,384	0,377	0,372	0,369	0,365
2,0	0,461	0,413	0,382	0,361	0,346	0,335	0,326	0,318	0,312
2,5	0,461	0,411	0,376	0,351	0,333	0,318	0,306	0,297	0,289
3,0	0,461	0,412	0,377	0,350	0,329	0,313	0,299	0,288	0,279
3,5	0,461	0,415	0,380	0,353	0,331	0,313	0,298	0,286	0,275
4,0	0,461	0,418	0,384	0,356	0,334	0,316	0,301	0,287	0,276
4,5	0,461	0,420	0,388	0,361	0,339	0,320	0,304	0,291	0,279
5,0	0,461	0,423	0,392	0,365	0,344	0,325	0,309	0,295	0,283

Tabela 5 – Relações $|\sigma_c/\sigma_t|$ obtidas com o modelo proposto para seção T com geometria varável, $f_{ck}=30\text{MPa}$, $E_{ci}=30,7\text{GPa}$, $f_{ctk}=2,90\text{MPa}$ e $\alpha_e=1,0$.

Fonte: autores

$\beta \backslash \gamma$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85	1,85
1,5	1,85	1,59	1,46	1,38	1,33	1,29	1,27	1,24	1,23
2,0	1,85	1,51	1,32	1,20	1,13	1,07	1,02	0,99	0,96
2,5	1,85	1,49	1,29	1,15	1,06	0,99	0,93	0,89	0,86
3,0	1,85	1,50	1,29	1,15	1,04	0,96	0,90	0,86	0,82
3,5	1,85	1,52	1,31	1,16	1,05	0,97	0,90	0,85	0,80
4,0	1,85	1,54	1,33	1,18	1,07	0,98	0,91	0,85	0,80
4,5	1,85	1,56	1,35	1,20	1,09	1,00	0,93	0,87	0,82
5,0	1,85	1,57	1,38	1,23	1,11	1,02	0,95	0,88	0,83

Tabela 6 – Valores de $\alpha_{F\text{-calc}}$ obtidos com o modelo proposto para seção T com geometria varável, $f_{ck}=30\text{MPa}$, $E_{ci}=30,7\text{GPa}$, $f_{ctk}=2,90\text{MPa}$ e $\alpha_e=1,0$.

Fonte: autores

$\beta \backslash \gamma$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
1,0	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51
1,5	1,51	1,54	1,57	1,60	1,63	1,65	1,68	1,70	1,72
2,0	1,51	1,50	1,50	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
2,5	1,51	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,47	1,48	1,48
3,0	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,45	1,45
3,5	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
4,0	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
4,5	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,45	1,44
5,0	1,51	1,50	1,49	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44

Observando os resultados da Tabela 4, é possível constatar que a posição relativa da Linha Neutra obtida pelo modelo proposto diminui quando aumenta a relação γ entre as larguras da mesa e da alma da seção transversal. Por outro lado, a posição relativa de Linha Neutra apresenta pouca variação quando aumenta a relação entre a altura total da seção e a espessura da mesa de compressão. É importante notar que Langendonck (1944) sugere para a posição da Linha Neutra o valor de $x_{LN}/h=0,4$ para o caso de seção retangular, o que concorda, de modo aproximado, com os valores obtidos nas Tabelas 1 e 4.

Os resultados da Tabela 5 indicam que a relação entre as tensões de compressão e de tração do concreto nas bordas da seção transversal apresenta pouca influência da relação β entre a altura total da seção e a espessura da mesa de compressão e é mais afetado pela relação γ entre a largura total da mesa de compressão e a largura da alma da seção transversal. De fato, aumentando a largura relativa da mesa de compressão, é reduzida a tensão de compressão quando se admite que as deformações da seção variam de modo linear.

Os valores da Tabela 6 indicam que o coeficiente de forma calculado apresenta variação de 1,51 até 1,44 sendo de menor valor quanto mais as proporções da geometria de seção T com mesa comprimida são afastadas da seção retangular. Por se tratar de um coeficiente relacionado

com a geometria da seção, é esperado que este coeficiente possa representar um determinado grupo de geometrias e que pode ser utilizado como parâmetro simplificador do cálculo do momento de fissuração.

Quando são comparados os valores obtidos para o momento de fissuração no exemplo numérico, é observado distanciamento maior de resultados nas seções T em comparação com os valores da ABNT NBR 6118:2014. Devido a grande variabilidade de relações geométricas para seções de tipo T pode ser suposto que o valor do coeficiente de forma para seções T com $\alpha_F=1,2$ é um valor conservador para certas relações geométricas usuais, sendo que para relações geométricas não usuais o valor de α_F pode apresentar maiores diferenças.

Os resultados calculados para o coeficiente de forma de seções retangulares ($\beta=1$ ou $\gamma=1$) ficam muito próximos ao valor convencional de $\alpha_F=1,5$, quando é considerado agregado de granito ou gnaise com $\alpha_c=1,0$.

Outro aspecto a ressaltar é que neste texto não foi tratada da presença de armaduras nas seções de concreto, sejam elas ativas ou passivas. É de interesse desenvolver o assunto de presença de armadura em futuras publicações pelos autores e, com a comparação de mais resultados experimentais recentes disponíveis na literatura, aprofundar a discussão acerca do comportamento de peças de concreto fletidas em situação de formação de fissuras e os fatores que podem influenciar o comportamento das mesmas. Deseja-se, assim, aprimorar o entendimento deste assunto, principalmente com relação a elementos protendidos de concreto.

Ainda como exemplo de aplicação do modelo algébrico ao concreto armado e protendido, a Tabela 7 apresenta os valores obtidos para a seção T do exemplo numérico, porém considerando a influência da variação do tipo de agregado e presença de armadura passiva (concreto armado) ou ativa (concreto protendido). Para o caso da armadura passiva, aqui denominada “As”, foram consideradas 2 barras de aço CA-50 $\phi 20,0\text{mm}$, com eixo posicionado a 4,0cm a partir do fundo da viga. No caso da armadura ativa, aqui denominada “Ap”, foram consideradas 2 cordoalhas CP190RB $\phi 12,7\text{mm}$, com eixo posicionado a 4,0cm a partir do fundo da viga.

Tabela 7 – Valores de $M_{r\text{-calc}}$ obtidos com o modelo proposto para seção T com geometria fixa, f_{ck} e tipo de agregado variáveis.
Fonte: autores

f_{ck} (MPa)	20	25	30	35	40	45	50
----------------	----	----	----	----	----	----	----

$\gamma_t.M_{r\text{-calc}}$ (kN.cm)							
$\alpha_e=0,7$	10792	12545	14175	15697	17143	18520	19834
$\alpha_e=0,9$	11387	13285	15055	16726	18323	19844	21307
$\alpha_e=1,0$	11575	13518	15336	17049	18688	20262	21771
$\alpha_e=1,2$	11845	13845	15723	17505	19202	20835	22405

$\gamma_t.M_{r\text{-calc}}$ (As) (kN.cm)							
$\alpha_e=0,7$	11953	13717	15355	16884	18336	19718	21037
$\alpha_e=0,9$	12546	14454	16232	17910	19512	21038	22505
$\alpha_e=1,0$	12734	14687	16513	18232	19876	21456	22969
$\alpha_e=1,2$	13003	15013	16899	18688	20390	22028	23603

$\gamma_t.M_{r\text{-calc}}$ (Ap) (kN.cm)							
$\alpha_e=0,7$	20578	22370	24034	25586	27057	28457	29792
$\alpha_e=0,9$	21073	23017	24826	26530	28155	29701	31187
$\alpha_e=1,0$	21230	23222	25081	26829	28497	30097	31629
$\alpha_e=1,2$	21456	23511	25433	27252	28981	30641	32236

Conclusões

Considerando-se que valores obtidos para o momento de fissuração pelo modelo proposto apresentam desvios de -1,6% até +2,8% a metodologia e as equações apresentadas para obtenção do momento de fissuração indicam a validade do modelo proposto para seções retangulares, com concretos com f_{ck} entre 20 e 50 MPa e com agregado de granito ou de gnaise.

Os valores obtidos para seção retangular de concretos com agregados de diferentes tipos mostram desvios percentuais variando de -7,9% até +5,7%. Estas diferenças são decorrentes da consideração do valor de E_{ci} na formulação do modelo proposto, o que afeta a distribuição de tensões de tração do concreto e conduz a valores de momento de fissuração M_{f-calc} que se distanciam daqueles recomendados com a formulação clássica de M_f .

As relações entre tensões de compressão e tração para seções retangulares apresentam tendências coerentes com as bibliografias consultadas.

Para a seção T exemplificada foi obtido coeficiente de forma de 1,46, divergindo daquele indicado pela norma ABNT NBR 6118:2014 ($\alpha_F=1,2$) e sugerindo que este último valor é conservador para o cálculo do momento de fissuração M_f .

As relações apresentadas para seção T com geometria variável indicam que tanto a posição da Linha Neutra quanto a relação entre tensões de compressão e tração sofrem variação de acordo com variação das relações $\gamma=b_f/b_w$ e $\beta=h/h_f$. Por outro lado, as relações do coeficiente de forma α_F não apresentam variação significativa para os mesmos parâmetros.

O modelo proposto está baseado em equações constitutivas que consideram a não linearidade das relações entre tensão e deformação do concreto. Como resultado a posição da Linha Neutra é diferente do centro geométrico da seção bruta analisada, o que diverge da formulação clássica de M_f onde é assumida a simplificação de $y_{LN}=y_{CG}$.

Com a utilização do modelo proposto, é possível avaliar o momento de fissuração em seções com geometrias diversas das definidas na norma ABNT NBR 6118:2014, sendo possível aplicar este modelo em peças com geometrias que não podem ser diretamente classificadas como retangular ou T.

Nota-se que a presença de armadura ativa (concreto protendido) aumenta consideravelmente a resistência da peça à fissuração e que a armadura passiva (concreto armado) representa pequeno acréscimo.

Finalmente, foi sugerido neste texto que o efeito da rigidez do agregado pode ser considerado na determinação do momento de fissuração segundo uma variação não linear do coeficiente α_e indicado na norma ABNT NBR 6118:2014.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, ABNT, 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; NBR 7482:2008 – Fios de aço para estruturas de concreto protendido: Especificação. Rio de Janeiro, ABNT, 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS; NBR 7483:2008 – Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido: Especificação. Rio de Janeiro, ABNT, 2008.
- ABNT NBR 6118:2014 Comentários e Exemplos de Aplicação. Editora IBRACON, 2015.
- AALAMI, Bijan O.; Post-Tensioned Buildings – Design and construction. Edição do autor, 2014.
- ALBINO, Fávio de Souza; Radier simples, armado e protendido – Teoria e prática. Edição do autor, 2017.
- BUCHAIN, Roberto; Concreto armado e protendido: resistência à força cortante; teoria do campo de compressão, teoria modificada do campo de compressão, analogia da treliça modificada em vigas T. Ed: UEL, 1998.
- BUCHAIN, Roberto; Concreto protendido: tração axial, flexão simples e força cortante. Ed: EDUEL, 2007.
- CARVALHO, Roberto Chust; Estruturas em Concreto Protendido: Cálculo e Detalhamento. 2. ed. São Paulo: Editora PINI, 2017.
- CHOLFE, Luiz; BONILHA, Luciana; Concreto protendido: Teoria e Prática. 1. Ed. São Paulo, Editora Pini, 2013.
- EMERICK, ALEXANDER A.; Projeto e execução de lajes protendidas. Ed. Interciência, 2005.
- FUSCO, Péricles B.; Estruturas de concreto – Solicitações normais. Ed. LTC, 1981.
- FUSCO, Péricles B.; Estruturas de concreto – Solicitações tangenciais. Ed. PINI, 2008.
- LANGENDONCK, T. VAN; Cálculo de concreto armado. Vol. I. 1. ed. São Paulo: ABCP, 1944.
- LEONHARDT, FRITZ; MÖNNIG, EDUARD; Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado. Vol. 1. Ed. Interciência, 1977.
- LEONHARDT, FRITZ; MÖNNIG, EDUARD; Construções de concreto – Concreto protendido. Vol. 5. Ed. Interciência, 1983.
- MOERSCH, E.; Concrete-Steel construction. London, Archibald Constable & Company, 1909.
- PFEIL, Walter; Concreto protendido. Vol. 3. Ed. LTC, 1984.
- VASCONCELOS, Augusto C.; Manual prático para correta utilização dos aços no concreto protendido. Ed. LTC, 1980.