

# CONTRIBUIÇÃO DA PROTENSÃO COM CABOS RETOS E PARABÓLICOS EM VIGAS PARA O DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA TRANSVERSAL: COMPARATIVO ENTRE NBR 6118:2014 E ACI 318:2014.

Rafael Felipe Jansen<sup>1</sup>; Fábio Albino de Souza<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IDD / [rafaeljansen@hotmail.com](mailto:rafaeljansen@hotmail.com); <sup>2</sup> EBPX / [Fabio@ebpx.com.br](mailto:Fabio@ebpx.com.br)

## 1. Introdução

As tensões normais atuantes em uma seção transversal são resistidas pelo concreto comprimido e pela armadura longitudinal previamente tracionada no concreto protendido. As vigas submetidas a um carregamento vertical qualquer, com ou sem esforço normal, estão trabalhando em flexão simples ou composta não pura e, nesta situação, o momento fletor é variável e a força cortante passa a ser diferente de zero, surgindo na seção transversal, além das tensões normais, tensões tangenciais que equilibram o esforço cortante. Para cargas de pequena intensidade, em que as tensões de tração na flexão não superam a resistência à tração do concreto (estádio I), o comportamento da estrutura e o cálculo das tensões tangenciais decorrentes de esforço cortante podem ser obtidas com o auxílio das fórmulas da resistência dos materiais. Ao se aumentar o carregamento, ultrapassada em alguns pontos a resistência à tração na flexão do concreto, há o início de sua fissuração (estádio II), e é produzido um complexo reequilíbrio de tensões entre o concreto e armadura, que resistidas pelo concreto comprimido, que se mantém íntegro entre as fissuras (bielas comprimidas), e as tensões de tração são resistidas por uma armadura transversal (armadura de cisalhamento). No caso de peças de concreto protendido, dependendo do nível de protensão (parcial, limitada ou completa), a fissuração do concreto pode ocorrer somente após, por exemplo, no caso de proteção completa, a atuação das cargas correspondentes à combinação rara; mas ainda assim, para efeito de dimensionamento, no estado limite último haverá a fissuração do concreto e, portanto, o cálculo no estado limite último deve ser feito como o concreto armado. No reequilíbrio das tensões, após o início da fissuração, outros mecanismos passam a atuar, tais como o engrenamento dos agregados do concreto, efeito pino da armadura longitudinal, que, podem ser considerados na resistência final da peça ao cortante.

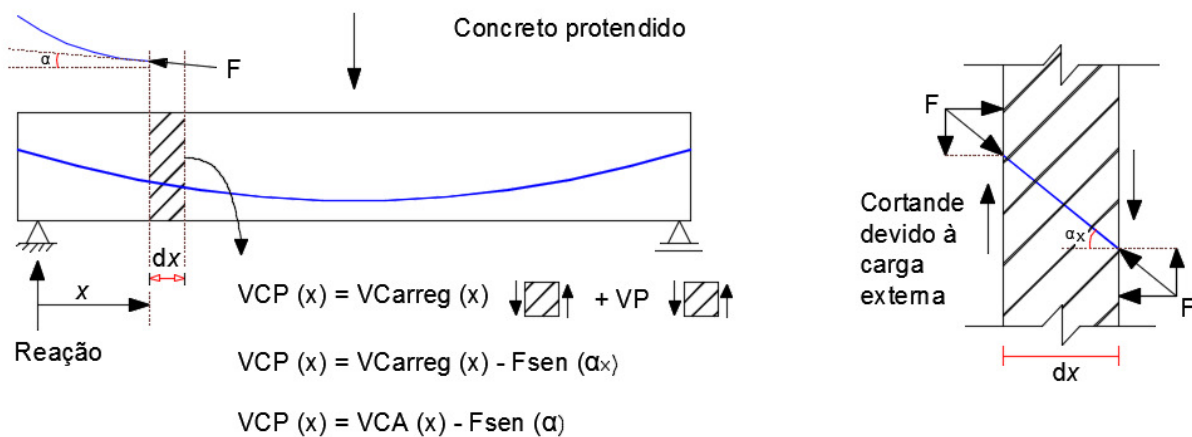
No dimensionamento das estruturas de concreto armado, a tração na flexão gerada pelo carregamento é combatida exclusivamente pelo aço. A armadura longitudinal, chamada de armadura passiva, destina-se a receber os esforços de tração não absorvidos pelo concreto, trabalhando somente quando solicitada. Nas estruturas de concreto protendido a força aplicada nos cabos é transmitida ao concreto, combatendo as tensões de tração por flexão e auxiliando as armaduras passivas. A armadura de protensão, chamada de armadura ativa, é colocada na peça não somente para comprimir e gerar as tensões de compressão necessárias para que o concreto possa absorver as tensões de tração gerada pelo carregamento, mas também para resistir aos carregamentos externos atuantes, oferecendo muitas vantagens, como a redução do esforço cortante solicitante pela ação da componente vertical gerada pela protensão, no caso de cabos parabólicos, o aumento das tensões de compressão e redução das tensões de tração, redução de flechas e da fissuração, com a estrutura permanecendo praticamente no Estádio I ao longo de sua vida útil. Este artigo objetiva avaliar a contribuição da protensão na redução do esforço cortante solicitante em vigas, através do estado de tensão e da componente vertical gerada com a inclinação do cabo de protensão, sendo os resultados para as cargas últimas comparados às estimativas das normas ACI 318:2014 e NBR 6118:2014. O principal foco do trabalho foi o comparativo dos resultados finais entre cabos

retos e parabólicos da Norma Brasileira e a Americana, para o dimensionamento da armadura transversal.

## 2. Avaliação do modelo estrutural

A protensão também induz tensões de compressão que contribuem para a redução das tensões principais de tração de modo que as fissuras de cisalhamento apresentam menor inclinação. De acordo com LEONHARDT (1983), a inclinação das bielas varia de 15° a 30°. Contudo, em trechos com cargas concentradas ou sobre apoios intermediários de vigas contínuas, por exemplo, surgem fissuras de cisalhamento que, inevitavelmente, atingem 45°.

Segundo NAAMAN (2004), a protensão longitudinal introduz nas peças de concreto protendido com cabos inclinados uma componente vertical que depende da força total do cabo e que reduz o esforço cortante solicitante. A Figura 1 mostra uma viga de concreto protendido com uma seção  $dx$  e as componentes geradas pela protensão.



**Figura 1 – Componentes geradas pela protensão. (NAAMAN, 2004)**

Algumas pesquisas buscaram entender os parâmetros que influenciam na resistência ao cisalhamento de vigas de concreto protendido. LASKAR e HSU (2010), estudaram o comportamento ao cisalhamento de cinco vigas de concreto protendido, com 7620 mm de comprimento,  $f_c'$  médio de 70,5 MPa, seção transversal e altura útil de 568 mm, tendo como variáveis a taxa de armadura transversal, o traçado do cabo de protensão e a relação vão altura útil ( $a/d$ ). As vigas B1, B2 e B4 apresentaram traçado reto e foram projetadas para o modo de ruptura por cisalhamento, com relação  $a/d$  (1,61), e as vigas B3 e B5, com traçado parabólico, também com ruptura por cisalhamento, apresentaram relação  $a/d$  (4,29). A taxa de armadura transversal das vigas variou de  $\rho_w = 0,17\%$  para as vigas B1, B4 e B5 e de  $\rho_w = 0,95\%$  para as vigas B2 e B3. A Tabela 1 apresenta os parâmetros de ensaio, além das cargas últimas experimentais e os modos de ruptura.

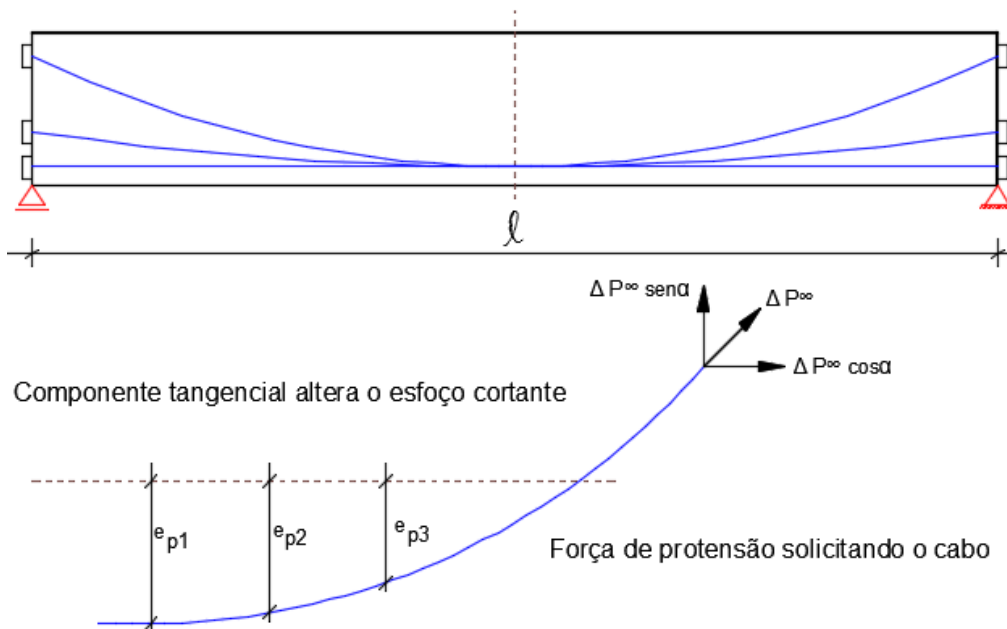
**Tabela 1 – Variáveis e modos de ruptura das vigas de LASKAR e HSU, (2010).**

Vigas	I (mm)	D (mm)	bf (mm)	bw (mm)	$f'_c$ (MPa)	a/d	Taç.	$\rho_w$ (%)	s (mm)	Vu (kN)	Mu (kN.m)	Modo ruptura
B1					72,4	1,61	R	0,17	250	840,2	892	Cisalh. alma
B2					74,5	1,61	R	0,95	178	1040,8	1106	
B3	7620	568	150	50	64,6	1,61	P	0,95	178	1014	1077	
B4					71,0	4,29	R	0,17	250	430	470	Flexo-cisalh.
B5					64,5	4,29	P	0,17	250	450	490	

**R – traçado do cabo reto; P – traçado do cabo parabólico.**

### 3. Efeitos da força cortante de protensão

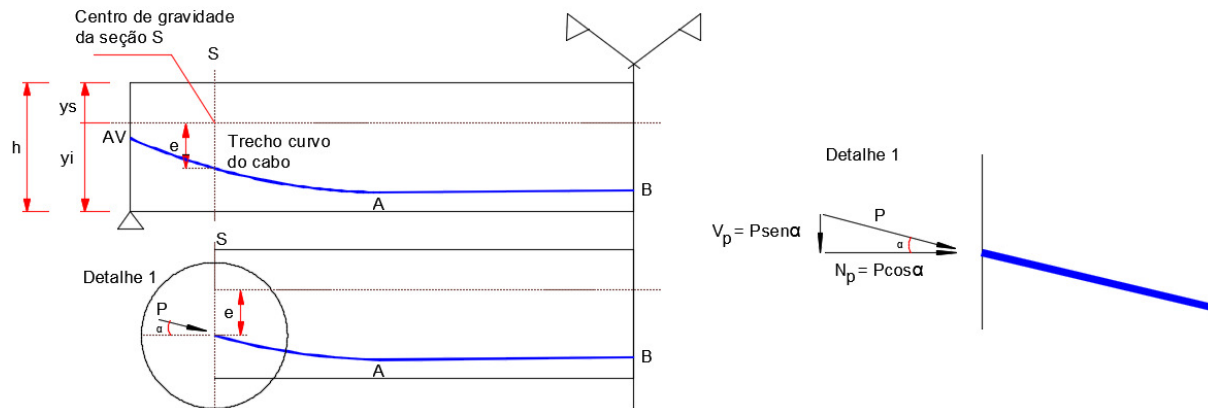
A força de protensão longitudinal introduz nas peças de concreto, tensões de compressão que reduzem as tensões principais de tração, e as fissuras de “cisalhamento” apresentam-se com menor inclinação que nas vigas de Concreto Armado. As bielas comprimidas apresentam-se com ângulos  $\theta$  de inclinação entre 15° e 35°, menores que o ângulo da “Trelíça Clássica” (45°). Quanto maior a força de protensão, menores são os esforços de tração na alma, sendo menor a quantidade de armadura transversal necessária. No caso de vigas protendidas isostáticas, o encurvamento dos cabos nas proximidades dos apoios produz uma componente de força contrária à força cortante solicitante, conforme observado na Figura 2.



**Figura 2 – Efeito da componente tangencial da protensão. (EMERICK, 2005)**

As vigas com traçado parabólico se mostraram mais eficientes em relação às vigas com traçado reto no combate ao esforço cortante reduzindo em torno de 10% o cortante solicitante das vigas em relação às vigas com traçado reto.

A Figura 3, mostra o esforço cortante de protensão isostático advindo do fato de o cabo, devido a sua trajetória, impor à seção uma força de protensão tangente ao cabo, com o ângulo da inclinação  $\alpha$ .



**Figura 3 – Ações solicitantes devido ao efeito de protensão em uma seção S. (CHUST, 2012)**

Normalmente esta ação é de sentido contrário às permanentes e acidentais, combatendo-as. Desta forma, ao calcular o cortante em uma seção de uma peça em concreto protendido com cabo parábólico é preciso utilizar a expressão (1), conforme abaixo:

$$V_d = \gamma_{fg}(V_{g1} + V_{g2}) + \gamma_{fq}(V_{q,m\acute{a}x \text{ ou } m\acute{i}n}) + \gamma_{fp}P \text{ sen } \alpha \quad (1)$$

Onde:

$V_d$  – cortante de cálculo na seção em KN;

$V_{g1}$  – cortante devido às ações permanentes de peso próprio na seção em KN;

$V_{g2}$  – cortante devido à ação de sobrecarga permanente na seção em KN;

$V_{q,m\acute{a}x \text{ ou } m\acute{i}n}$  – cortante máximo ou mínimo devido às ações acidentais (variáveis) na seção em KN;

$\gamma_{fg}$  – coeficiente de ponderação no ELU para as ações permanentes;

$\gamma_{fq}$  – coeficiente de ponderação no ELU para as ações acidentais;

$\gamma_{fp}$  – coeficiente de ponderação no ELU para as ações de protensão;

$P$  – força de protensão na seção em KN;

$\alpha$  – ângulo da tangente à trajetória do cabo na seção.

Por fim, a NBR 6118:2014 prescreve no seu item 17.4.1.2.2, “Efeito da componente tangencial da força de protensão” que:

*No valor de  $V_{sd}$  deve ser considerado o efeito da projeção da força de protensão na sua direção, com o valor de cálculo correspondente ao tempo  $t$  considerado. Entretanto, quando esse efeito for favorável, a armadura longitudinal de tração junto à face tracionada por flexão deve satisfazer à condição:*

$$A_p f_{pyd} + A_s f_{yd} \geq V_{sd}$$

Os resultados experimentais de LASKAR e HSU (2010), mostraram também que as vigas apresentaram dois modos de ruptura, segundo a Norma Norte Americana ACI 318:2014:

Flexo-Cisalhamento (Flexure Shear) e Cisalhamento na Alma (Web Shear). As vigas que romperam em cisalhamento na alma apresentaram ruptura frágil, enquanto que as vigas que romperam em flexo-cisalhamento apresentaram ruptura dúctil. As vigas com relação  $a/d$  de 4,29 apresentaram ruptura dúctil quando comparadas às vigas com  $a/d$  de 1,61, mostrando a forte influência deste parâmetro na resistência ao cisalhamento de vigas protendidas. As vigas B1 e B2, que apresentaram como variáveis apenas a taxa de armadura transversal, apresentaram ruptura frágil devido à baixa relação  $a/d$ , sendo que a resistência da viga B1 foi 30% maior que da viga B2.

MacGREGOR (1960), avaliou a influência do traçado do cabo de protensão na resistência ao cisalhamento de vinte e duas vigas de concreto protendido, com ângulo de inclinação medido do centro geométrico da armadura de protensão, na seção central, até o eixo longitudinal da viga, variando de zero a dez graus. A Tabela 2 apresenta as características das vigas ensaiadas por MacGREGOR (1960). O comportamento das vigas após a formação da fissura inicial (estado de descompressão), foi alterado de acordo com a inclinação dos cabos. Para vigas com maiores inclinações dos cabos ocorreu um ganho médio de resistência de 25%, da formação da primeira fissura até a ruptura, quando comparada com as demais vigas de menores inclinações. Para as vigas com menores inclinações não houve aumento significativo de carga, da formação da primeira fissura até a ruptura. Isso ocorreu devido à componente horizontal, para os cabos com menores inclinações, ser maior que para os cabos com maiores inclinações, levando ao aumento das tensões que causam as fissuras nas vigas com cabos de menores inclinações.

**Tabela 2 – Características das vigas de MacGREGOR, (1960).**

Vigas	$f_c$ (MPa)	bf (mm)	bw (mm)	d (mm)	$\sigma_p$ (MPa)	$\emptyset$ (Grau)	N° cabos	
AD.14.37	22.5	152	152	254	742	6.45	11	
B.14.34	18.2				805	0.00	12	
B.14.41	20.0				805	0.00	12	
BD.14.18	43.0				861	2.70	13	
BD.14.19	43.0				784	5.00	12	
BD.14.23	26.6				693	10.00	11	
BD.14.26	24.0				812	10.00	11	
BD.14.27	24.0				777	2.22	11	
BD.14.28	23.0				826	1.53	11	
BD.24.32	18.6				80	770	1.88	11
BD.14.34	18.0					770	6.28	11
BD.14.35	20.0					770	2.38	11
BD.14.42	26.0					567	6.45	11
BV.14.30	28.0					861	3.25	11
BV.14.32	26.0					784	3.25	12
BV.14.34	25.0					868	2.70	12
BV.14.35	23.5					805	5.36	12
BV.14.42	20.0					840	6.80	13
CD.13.23	26.5					840	0.00	12
CD.13.24	25.0				45	784	3.40	12
CD.13.25	24.0		826	2.85		12		
CD.14.34	17.5		735	1.88		11		

### 3.1. Efeito do esforço normal

Pode-se pensar que, no caso da pré-tração, onde os cabos são retos, não haverá vantagem de usar a protensão para combater o esforço cortante. Mas combater o cisalhamento passa também por evitar que a resistência da tração diagonal do concreto seja ultrapassada, ou seja, a tração que ocorre no concreto em uma direção inclinada em relação ao eixo longitudinal da peça. Analisando a expressão de tensão principal de tração, descrita na equação (2) abaixo, conclui-se obviamente que, se o valor de  $\sigma_x$  for de compressão (devida à protensão), haverá chance menor de a tensão de tração ser alcançada.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (2)$$

Esse efeito será considerado numericamente ao se considerar um ganho de resistência no cisalhamento devido ao estado de descompressão da seção. De maneira simplista, até que as fibras da seção comecem a ser tracionadas, o cortante existente é absorvido pela protensão.

Finalizando a conceituação pode-se dizer que:

- Na pós-tração com cabo curvo há o alívio do cortante isostático e protensão; o efeito da tensão normal de compressão e a armadura de protensão podem também ser utilizados na armadura transversal.
- Na pré-tração com cabo reto há apenas o efeito da tensão normal de compressão.

### 3.2. Verificações das tensões de cisalhamento

A capacidade resistente ao cisalhamento de uma viga de concreto protendido pode ser dividida em duas parcelas, uma resistida pelo concreto e seus mecanismos auxiliares descritos a diante, e outra resistida pela armadura transversal. Uma viga, mesmo sem armadura transversal apresenta capacidade de resistir a uma determinada força cortante. A Figura 4 mostra as várias componentes dos mecanismos de resistência ao cisalhamento de vigas sem armadura transversal, exceto a componente relativa ao efeito de arco, segundo o ACI-ASCE Committee 426 (1973).

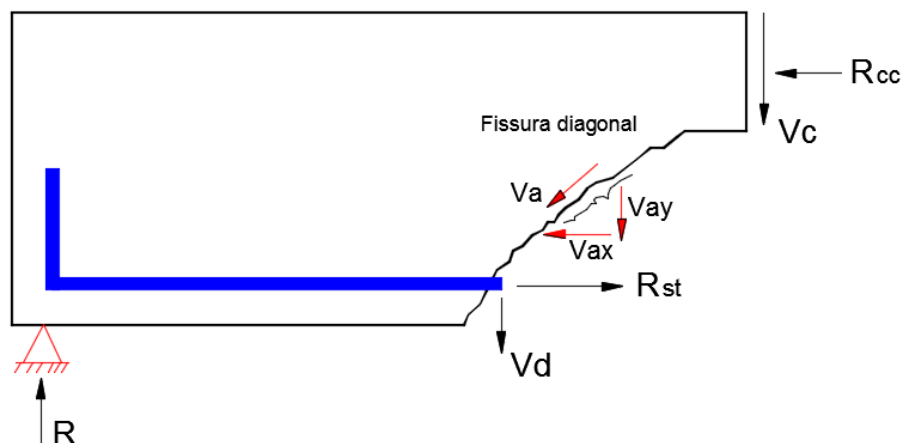


Figura 4 – Forças atuantes em uma fissura inclinada. (ACI – ASCE Committee, 1973)

Para estruturas de concreto armado submetidas a forças cortantes, a parcela de resistência devida ao concreto é a soma de diversos esquemas capazes de transmitir esforços entre as seções como o efeito do concreto não fissurado (cantilever action), sendo que este mecanismo ocorre em trechos não fissurados da viga (entre duas fissuras consecutivas) ou em partes não fissuradas de elementos fissurados (zona de compressão de uma seção fissurada); o engrenamento dos agregados (aggregate interlock), que ocorre entre as duas superfícies originadas por uma fissura, e a contribuição do engrenamento dos agregados para a resistência ao cisalhamento depende da abertura da fissura e da rugosidade das superfícies; o efeito de encavilhamento da armadura (dowelaction-effect), onde a armadura longitudinal resiste a uma parcela do deslocamento causado pela força cortante devido ao efeito de pino na barra, sendo que a força de pino na barra da armadura longitudinal depende da rigidez da barra na interseção com a fissura; e o efeito de arco (archingaction), que é um mecanismo que ocorre de forma mais expressiva em vigas com vãos reduzidos e confere à viga um acréscimo em sua capacidade resistente. Para o caso de vigas submetidas a carregamentos concentrados, a intensidade deste efeito de arco está relacionada com a relação  $a/d$  da viga, onde  $a$  é a distância do ponto de aplicação do carregamento ao apoio mais próximo e  $d$  é a distância da fibra mais comprimida da seção da viga ao centro de gravidade da armadura longitudinal de tração. Vigas com a relação  $a/d$  menor do que 1, desenvolvem fissuras que vão desde o ponto de aplicação do carregamento até o apoio. Estas fissuras impedem o fluxo de cisalhamento da armadura longitudinal para a zona comprimida fazendo com que o elemento comece a comportar-se como um arco e não mais como uma viga.

### 3.2.1 NBR 6118:2014

A NBR 6118:2014 apresenta dois modelos de cálculo baseados na analogia em modelo de treliça, de banzos paralelos, associados a mecanismos resistentes complementares desenvolvidos no interior do elemento estrutural e traduzidos por um a componente adicional  $V_c$ . O modelo I, considera a verificação da diagonal comprimida  $V_{Rd2}$  e da diagonal tracionada  $V_{Rd3}$ . A inclinação da biela é de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural.

De acordo com a NBR 6118:2014 nesse contorno a tensão solicitante é máxima e deve ser comparada à resistência do concreto à compressão diagonal conforme a equação (3) e (4) abaixo:

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d \quad (3)$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (4)$$

Onde:

$\alpha_{v2} = (1 - f_{ck}/250)$ , sendo  $f_{ck}$  em MPa;

$V_{sw} = (A_{sw}/s) 0,9 d f_{ywd} (\text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha)$  em KN;

$V_c = 0$  em elementos estruturais tracionados quando a linha neutra se situa fora da seção transversal, em KN;

$V_c = V_{c0}$  na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção em KN;

$V_c = V_{c0} (1 + M_0/M_{Sd,m\acute{a}x}) \leq 2 V_{c0}$  na flexo-compressão em KN, sendo:

$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d$ , em KN;

$f_{ctd} = f_{ctk,inf}/\gamma_c$ , em  $\text{KN/m}^2$ .

O modelo II, também considera a verificação da diagonal comprimida  $V_{Rd2}$ , e da diagonal tracionada  $V_{Rd3}$ . Neste caso, a inclinação da biela varia entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , conforme a equação (5) e (6) descritas abaixo.

$$V_{Rd2,II} = 0,54 \alpha_{v2} f_{cd} b_w d \text{sen}^2 \theta (\cot \alpha + \cot \theta) \quad (5)$$

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (6)$$

Onde:

$V_{sw} = (A_{sw}/s) 0,9 d f_{ywd} (\cot \alpha + \cot \theta) \text{sen} \alpha$ , em KN;

$V_c = 0$  em elementos estruturais tracionados quando a linha neutra se situa fora da seção transversal, em KN;

$V_c = V_{c1}$ , na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção, em KN;

$V_c = V_{c1} (1 + M_0/M_{Sd,m\acute{a}x}) < 2 V_{c1}$  na flexo-compressão, em KN, com:

$V_{c1} = V_{c0}$  quando  $V_{Sd} \leq V_{c0}$ , em KN;

$V_{c1} = 0$  quando  $V_{Sd} = V_{Rd2}$ , interpolando-se linearmente para valores intermediários, em KN.

### 3.1.2 ACI 318:2014

Segundo o ACI 318:2014, a resistência ao cisalhamento de vigas de concreto protendido é baseada no modelo de analogia de treliça modificada, onde  $V_n$  é resistência nominal ao cisalhamento, obedecendo a condição de ser maior que o esforço cortante de cálculo na seção considerada  $V_u$ , conforme apresentada nas equações (7) e (8).

$$V_u \leq \phi V_n \quad (7)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (8)$$

Onde:

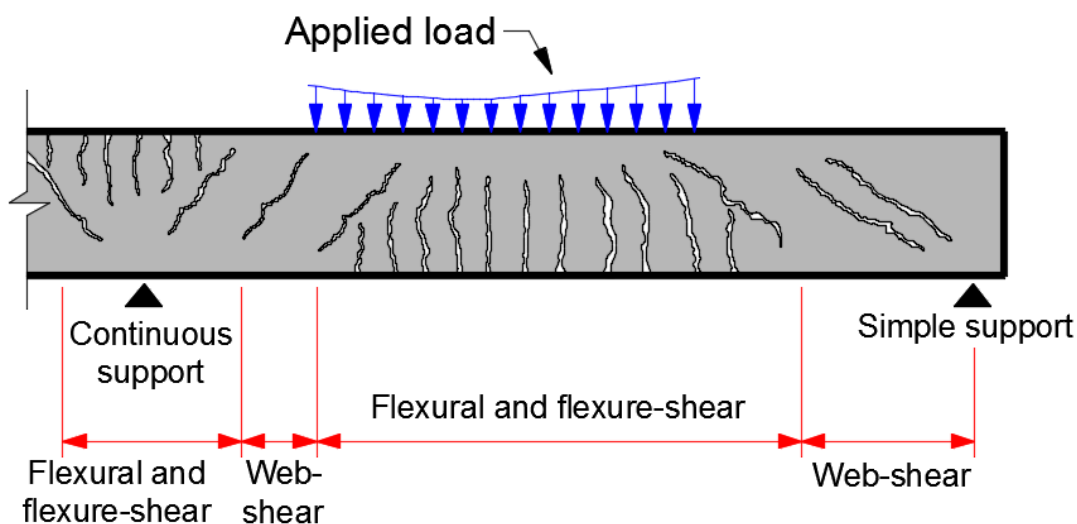
$\phi$  – fator de redução igual a 0,75;

$V_c$  – parcela proveniente do concreto, em kgf;

$V_s$  – parcela proveniente da armadura transversal, em kgf.

O cálculo da parcela  $V_c$  é baseado no padrão de fissuração mostrado na Figura 5 onde o esforço  $V_{ci}$  é responsável pelo surgimento de fissuras de flexão e o esforço  $V_{cw}$  pelo surgimento das fissuras de cisalhamento na alma, sendo calculados segundo as equações (9) e (10). O valor da parcela  $V_c$  será o menor entre os dois.





**Figura 5 – Tipos de fissuras para vigas de concreto. (ACI 318:2014)**

$$V_{ci} = \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}} \right) \geq \left( 0,45 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \right) \quad (9)$$

$$V_{cw} = \left( 0,93 \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3 f_{pc} \right) b_w d_p + V_p \quad (10)$$

Onde:

- $\lambda$  – fator de modificação das propriedades mecânicas do concreto, igual a 1;
- $f'_c$  – resistência à compressão do concreto, em  $\text{kgf/cm}^2$ ;
- $b_w$  – largura da seção transversal, em cm;
- $d_p$  – distância da fibra extrema mais comprimida ao centro de gravidade da armadura de protensão, mas não menor que  $0,8h$ , em cm;
- $V_d$  – cortante na seção considerada devido ao peso próprio em kgf;
- $V_i$  – cortante na seção considerada devido ao carregamento externo ocorrendo simultaneamente com  $M_{max}$ , em kgf.m;
- $M_{max}$  – momento máximo na seção devido ao carregamento, em kgf.m;
- $M_{cr}$  – momento que gera fissuras de flexão na seção devido ao carregamento em kgf.m;
- $f_{pc}$  – tensão de compressão do concreto, no centroide da seção transversal, que resiste ao carregamento externo, após todas as perdas de protensão, em  $\text{kgf/cm}^2$ ;
- $V_p$  – componente vertical da força efetiva de protensão para cabos com perfil curvo, em kgf;
- $I$  – momento de inércia da seção transversal, em  $\text{cm}^4$ ;
- $y_t$  – distância do centroide até a borda mais tracionada, em metros;
- $f_{pe}$  – tensão de compressão no concreto devido unicamente a força efetiva de protensão, em  $\text{kgf/cm}^2$ ;
- $f_d$  – tensão devido ao peso próprio na fibra mais afastada da seção transversal, onde a tensão de tração é causada por cargas externas aplicadas, em  $\text{kgf/cm}^2$ .

## 3.2 Considerações

### 3.2.1 Analogia da treliça modificada

Segundo BUCHAIM (2007), a força cortante resistida por atrito ao longo da fissura inclinada da alma,  $V_c$ , nas Figuras 6 e 7, foi determinada analiticamente por KUPFER, MANG e KARAVESYROGLOU (1983) e também por KIRMAIR (1985). Seu valor é praticamente independente do nível da tensão tangencial última relativa, calculado segundo a equação (11), conforme REINECK (2002). O valor de  $V_c$  varia aproximadamente na faixa de  $0,04 f_{c1} b_w z$  a  $0,06 f_{c1} b_w z$ :

$$\frac{\tau_u}{f_{c2}} = \frac{\left(\frac{V_u}{b_w z}\right)}{f_{c2}} \quad (11)$$

Sendo:

$f_{c1}$  – a resistência cilíndrica à compressão uniaxial do concreto;

$f_{c2}$  – a resistência à compressão do concreto da alma observada no ensaio ( $f_{c2} \approx 0,80 f_{c1}$ );

$z$  – a altura da seção resistente à força cortante.

Essa parcela resistente existe mesmo se a fissura inclinada cortar toda a peça, como ocorre na flexo-tração com pequena excentricidade, em que a linha neutra está fora da seção.

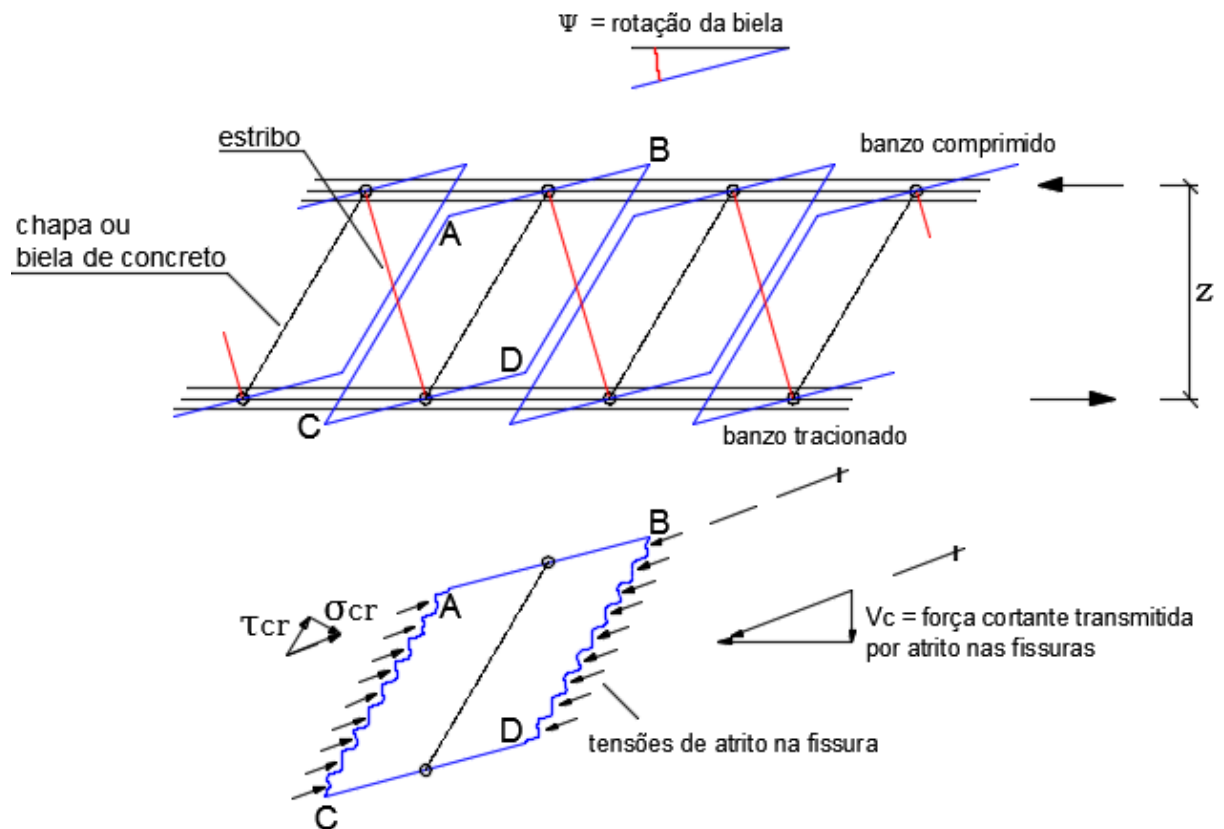
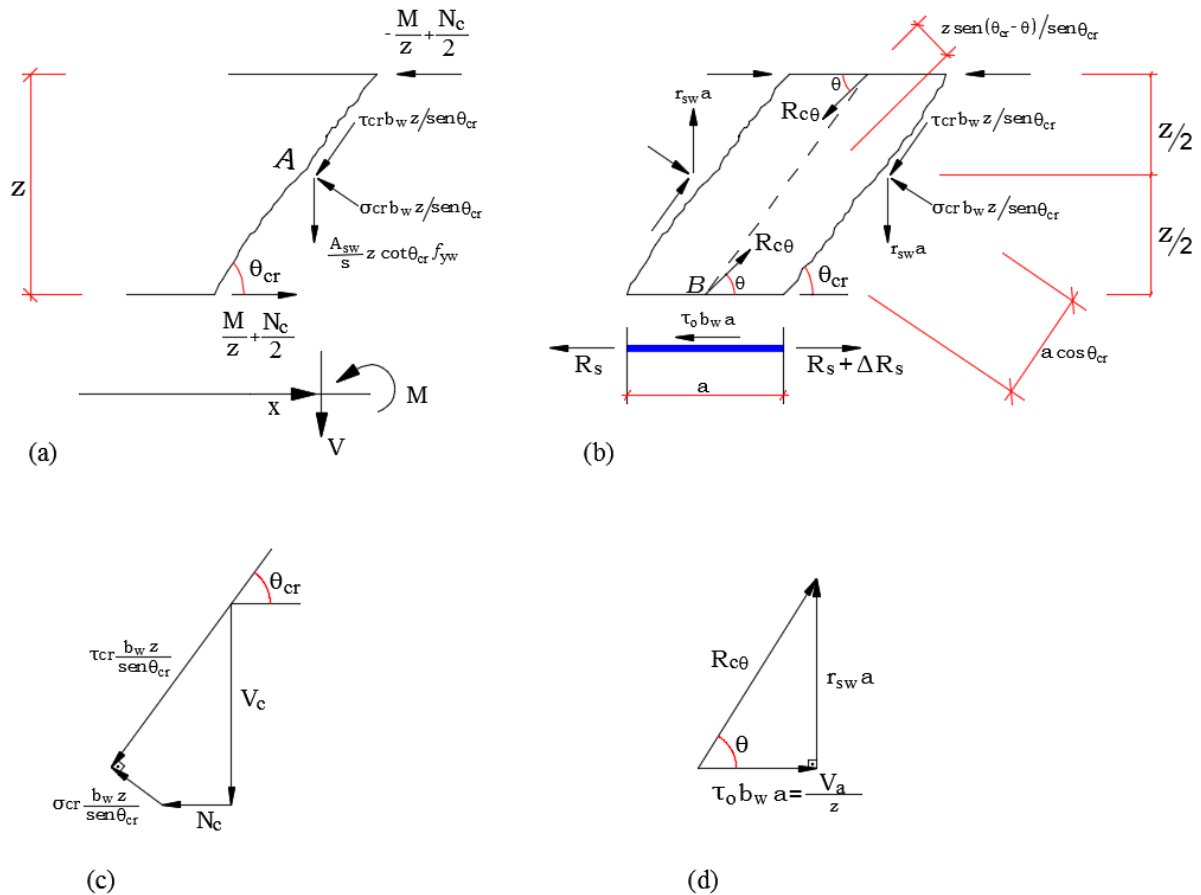


Figura 6 – Mecanismo resistente à força cortante e tensões nas faces da fissura, conforme Kirmair (1985).

A Figura 6 mostra os esforços resistentes na alma e nos banzos da viga. Ao longo da fissura, de inclinação  $\theta_{cr}$  em relação ao eixo longitudinal, há tensões tangenciais  $\tau_{cr}$  e normais  $\sigma_{cr}$  de atrito. A resultante das forças de atrito, Figura 7, aplicada a meia altura da seção resistente à força cortante, leva, conforme Figura 7, às componentes  $V_c$  e  $N_c$ , esta última usualmente resistida nos banzos. Ainda na Figura 6, mostra-se uma biela de concreto (chapa) entre duas fissuras sucessivas e as respectivas forças nos banzos e nas fissuras. A força  $R_{c\theta}$ , resultante das tensões principais de compressão, de direção dada pelo ângulo  $\theta$ , é o valor que se quer determinar a partir do ângulo  $\theta_{cr}$  da inclinação da fissura.



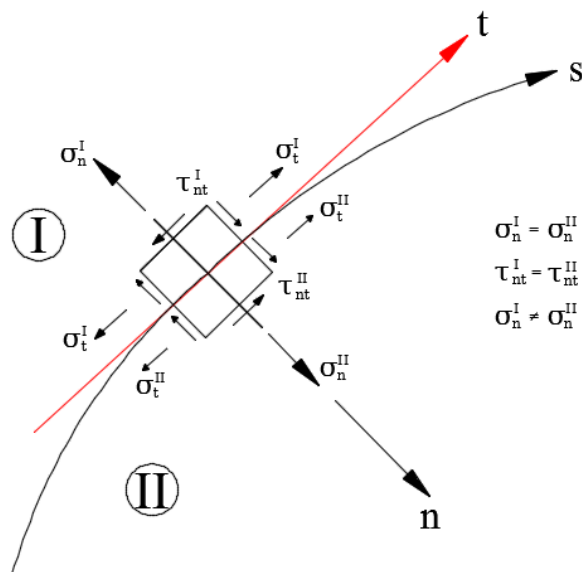
**Figura 7 – Analogia da treliça modificada: (a) forças atuantes nos banzos e ao longo da fissura; (b) equilíbrio da biela; (c) resultantes das forças de atrito; (d) força de compressão resultante na biela, conforme Kirmair (1985).**

### 3.2.2 Campos de tensão em vigas

Algumas soluções de problemas estruturais pela teoria da Plasticidade empregam com muita frequência campos de tensão (e de deslocamentos) descontínuos. A explicação que segue é dada por NIELSEN (1998).

Seja a chapa em estado plano de tensão, mostrada na Figura 8, dividida por uma linha qualquer nas partes I e II. Em um ponto dessa linha definem-se as direções tangencial e normal. Para satisfazer a lei de ação e reação, em um quadrado elementar situado nessa linha divisória, deve-se ter as igualdades  $\sigma_n^I = \sigma_n^{II}$  e  $\tau_{nt}^I = \tau_{nt}^{II}$ . Assim, se forem determinados campos de tensão das partes I e II em equilíbrio, satisfazendo inclusive as duas igualdades,

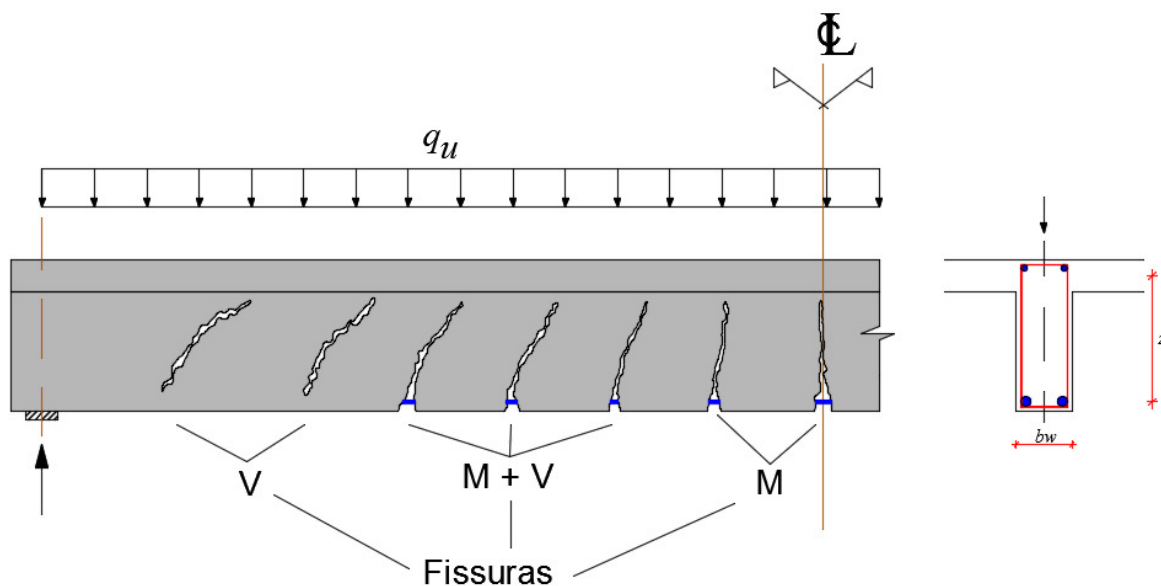
não há exigência nenhuma quanto às tensões  $\sigma_t$  na direção da tangente à linha no ponto considerado. Logo, a solução plástica é possível com descontinuidade (ou salto) na tensão  $\sigma_t$  ao longo da linha divisória considerada, ou seja,  $\sigma_t^I \neq \sigma_t^{II}$ .



**Figura 8 – Exemplo de campo descontínuo de tensão em uma chapa, conforme Nielsen (1998).**

#### 4. Vigas Protendidas

Como mostra a Figura 9, no Estado-limite último, as vigas protendidas têm, como no concreto armado, fissuração generalizada. Com isso, o mesmo modelo de treliça usado no concreto armado pode ser estendido ao concreto protendido, desde que se considere, conforme o grau de refinamento desejado, as influências favoráveis da protensão.



**Figura 9 – Fissuração na ruína da viga produzida por momento fletor e força cortante (BUCHAIM 2007).**

Essas influências são a compressão longitudinal, representada pela força de protensão (efeito de arco atirantado), e as forças de curvatura ou de mudança de direção.

A protensão é considerada como carga, decorrente do valor de cálculo da força de neutralização, segundo a equação (12), após todas as perdas ( $\gamma_p = 0,90$  geralmente). Essa força pode ser considerada constante no segmento da peça em que a força cortante mantém seu sinal, e igual ao valor da seção de máximo momento fletor (mesmo valor usado no ELU – Flexão). A força de neutralização, conforme a Figura 10, consome parte da resistência do aço, segundo a equação (12), restando a parte complementar, de acordo com a equação (13), a usar no modelo de treliça, para atingir a resistência ao escoamento  $f_{pyd}$ .

$$P_{nd} = \gamma_p P_n \quad (12)$$

$$\sigma_{pnd} = \gamma_p \frac{P_n}{A_p} \quad (13)$$

$$\Delta\sigma_{pd} = f_{pyd} - \sigma_{pnd} \quad (14)$$

A separação em 2 fases, feita anteriormente, permite entender com clareza as duas alternativas de dimensionamento da seção transversal. Na primeira alternativa, usa-se o diagrama completo  $\sigma_{pd}(\epsilon_{pd})$ , correspondendo à flexão simples considerada, (I + II). Entretanto, como as deformações até o ELU são medidas na seção de concreto (simples ou armado), a partir do estado de neutralização, soma-se à deformação de neutralização o acréscimo de alongamento na armadura protendida, este último como concreto armado, obtendo-se, com isso, a deformação total do aço, o qual deve estar em escoamento:

$$\epsilon_{pd} = \epsilon_{pnd} + \Delta\epsilon_{pd} > \epsilon_{pyd} \quad (15)$$

Essa deformação permite confirmar a plastificação da armadura, através da lei constitutiva do aço,  $\sigma_{pd}(\epsilon_{pd})$ .

A segunda alternativa é usada quando se trata a protensão como carga, e leva-se em conta a parte da lei constitutiva do aço equivalente à de uma armadura passiva, dada por  $\Delta\sigma_{pd}(\Delta\epsilon_{pd})$ .

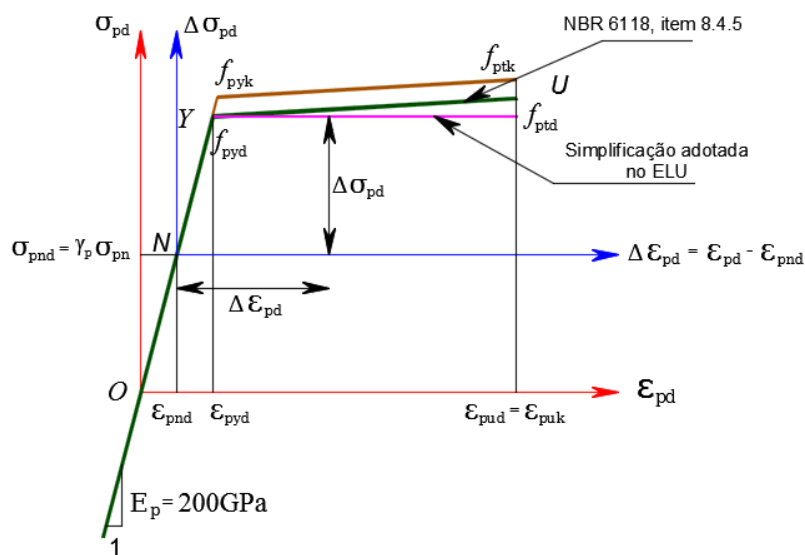


Figura 10 – Gráficos  $\sigma_{pd}(\epsilon_{pd})$  e  $\Delta\sigma_{pd}(\Delta\epsilon_{pd})$  do aço de protensão (BUCHAIM, 2007).

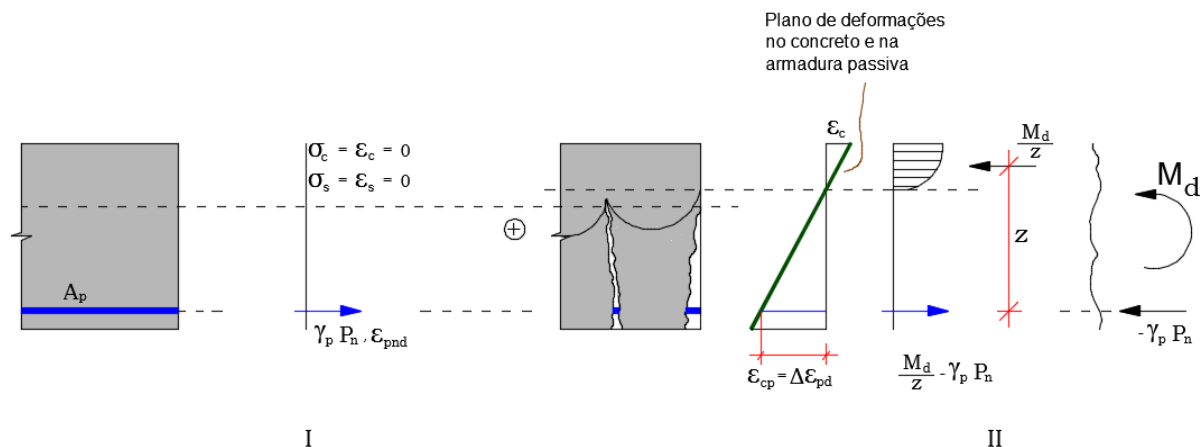
Considera-se assim apenas a fase II, na qual a seção está sujeita a flexo-compressão. A vantagem desta alternativa consiste em ter-se a força de compressão,  $-\gamma_p P_n$ , posicionada desde logo no banzo tracionado, compondo assim uma parcela (subtrativa) da força resistente, advinda do momento fletor atuante. Portanto, lida-se apenas com  $M_d$  na determinação da profundidade da linha neutra, da força no banzo comprimido e do braço de alavanca entre as forças dos banzos. Nesse caso, a condição de escoamento é escrita passando-se, na desigualdade, a deformação de neutralização para o lado direito:

$$\Delta\varepsilon_{pd} > \varepsilon_{pyd} - \varepsilon_{pnd} \quad (16)$$

Essa alternativa tem a desvantagem de ocultar, na flexão simples, a igualdade das forças resistentes dos dois banzos. Conforme apresentado na Tabela 2 e na Figura 11.

**Tabela 2 – Superposição das fases I e II (BUCHAIM 2007).**

Fase	Força na Armadura		Observação
	Solicitante	Resistente	
I	$\gamma_p P_n =$	$A_p(\gamma_p \sigma_{pn})$	Tirante
II	$\frac{M_d}{z} - \gamma_p P_n =$	$A_p \Delta\sigma_{pd}$	Flexo-compressão
Soma	$\frac{M_d}{z} =$	$A_p(\gamma_p \sigma_{pn} + \Delta\sigma_{pd}) = A_p f_{pyd}$	Flexão simples



**Figura 11 – Superposição no ELU – Flexão simples do Estado de Neutralização com a flexão composta normal na seção completa. (BUCHAIM, 2007).**

#### 4.1 Estado de neutralização

O estado próprio de tensões local, gerado pela protensão, corresponde a uma diferença de deformações entre os dois materiais. Deve-se notar que, na fase em que se ativa o estado próprio de tensões, não há força externa aplicada no cabo (ou cordoalhas engraxadas). Por outro lado, há força em cada material,  $P_0$  no aço e  $-P_0$  no concreto, ambas de mesma linha de ação e de intensidade. Somam, portanto, zero. Note-se também que, enquanto o concreto permanecer comprimido ou tracionado sem fissurar, há uma diferença de deformação que, por compatibilidade, terá que permanecer constante e igual a:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{p0} - \varepsilon_{c0} = \varepsilon_p - \varepsilon_c = cte \quad (17)$$

Essa equação indica que, com a aplicação da carga, mudam as deformações  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_c$ , mas não muda a diferença entre elas.

O estado de neutralização consiste em anular as tensões e as deformações na seção de concreto (com ou sem armadura passiva) para que, a partir desse estado nulo, seja mais fácil medir as deformações até o ELU, o qual, nas normas, é baseado em deformações limites. Na armadura de protensão, a deformação de neutralização, correspondente a esse estado nulo, deve ser somada ao acréscimo de deformação sofrido pelo concreto ao nível da armadura, por sua vez, limitado em 10%. A Figura 12 apresenta seção transversal de uma peça protendida em pós-tração, e sujeita à ação da força de protensão  $P_0$ , já considerada as perdas imediatas.

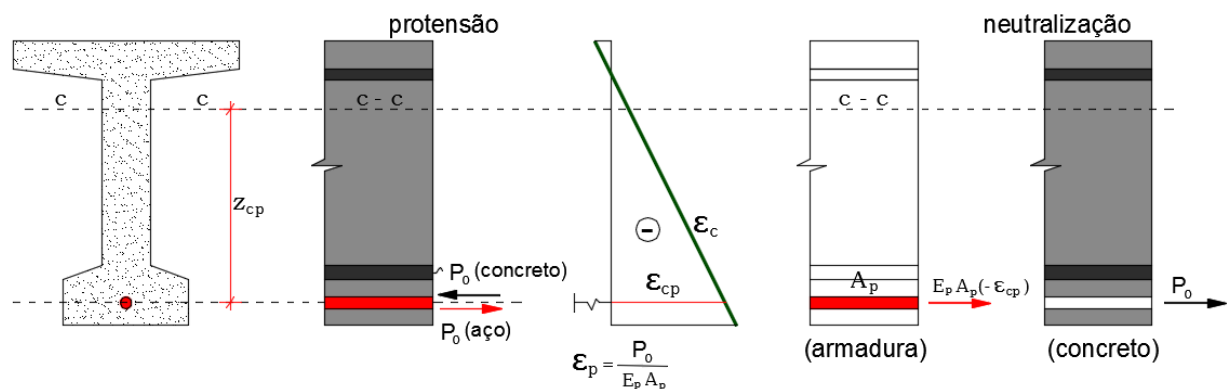


Figura 12 – Obtenção do Estado de Neutralização (BUCHAIM, 2007).

#### 5. Dimensionamento no Estado-limite último – Flexão simples

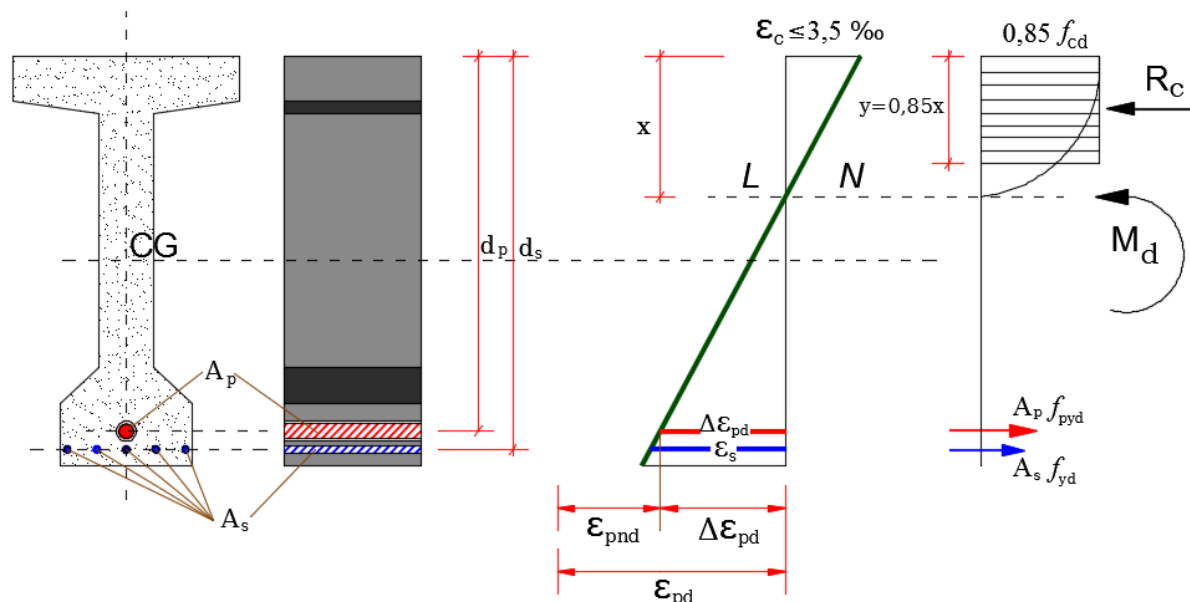
Considere-se uma viga protendida com pré-tração ou pós-tração com aderência posterior, sujeita à flexão simples. O dimensionamento da seção crítica em face da existência de aderência segue as mesmas hipóteses feitas para o concreto armado, com as seguintes considerações adicionais:

- a) a neutralização da seção;
- b) a possibilidade de armadura mista, ativa e passiva, na composição do banco tracionado.

No dimensionamento das áreas das armaduras há três incógnitas: a profundidade de linha neutra e as duas áreas  $A_p$  e  $A_s$ , para as duas equações de equilíbrio na seção: a de força

normal (igual a 0, na flexão simples) e a de momento fletor. Logo, para haver solução única, deve-se introduzir uma informação nova, por exemplo, fixando-se o grau de protensão.

A Figura 13 reúne os principais dados do problema. Para o concreto, utiliza-se o bloco retangular de tensões e, para os aços, admite-se a lei bilinear sem encruamento (i.e., o segmento plastificado é suposto horizontal, conforme Figura 10).



**Figura 13 – Valores para o dimensionamento da seção no ELU – flexão simples (BUCHAIM, 2007).**

No estado-limite último de flexão, é mais desfavorável considerar a neutralização da seção após as perdas progressivas. Nos casos de verificação do ELU no ato da protensão, tais perdas são, em geral, desconsideradas, pois são ainda incipientes.

## 6. Exemplo de dimensionamento da armadura transversal

Para exemplificar e comparar o dimensionamento da armadura transversal entre as Normas NBR 6118:2014 (modelo I) e ACI 318:2014, será apresentado um exemplo numérico. Neste exemplo, serão comparados os resultados finais das armaduras transversais, tanto para cabos retos como para cabos parabólicos.

A viga considerada apresenta seção transversal retangular com largura  $b_w = 45$  cm, altura útil  $d = 135$  cm, sendo considerado bi-apoiada resultando no esforço cortante de  $V_k = 500$  kN. Considera-se o concreto com resistência característica à compressão  $f_{ck} = 30$  MPa e o diâmetro da armadura transversal adotada com  $\Phi = 6,3$  mm.



## 6.1 NBR 6118:2014 – cálculo da armadura transversal sem o uso da protensão:

### a) Verificação do esmagamento da biela de concreto:

$V_{sd} = \gamma_f \cdot V_k \rightarrow V_{sd} = 1,4 \cdot 500 = 700 \text{ kN}$  é a força cortante solicitante de cálculo.

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot 0,88 \cdot \frac{30000}{1,4} \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 3093 \text{ kN}$$

com  $\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = \left(1 - \frac{30}{250}\right) = 0,88$  ( $f_{ck}$  em MPa).

Portanto,  $V_{sd} \leq V_{Rd2,I}$ , e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

### b) Cálculo da armadura transversal (estribos verticais simples, $\alpha = 90^\circ$ $\Phi$ 6,3 mm):

- Força cortante solicitante de cálculo:

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 500 = 700 \text{ kN}$$

- Força cortante ( $V_c$ ) absorvida por mecanismos complementares ao de treliça:

$$V_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_c = 0,6 \cdot 1448 \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 528 \text{ kN}$$

com  $f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} \rightarrow f_{ctd} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 1,44 \text{ MPa} = 1448 \text{ kN/m}^2$

- Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c \rightarrow V_{sw} = 700 - 528 = 172 \text{ kN}$$

- Espaçamento  $s$  dos estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) de  $\Phi = 6,3$  mm:

$$V_{sw} = \left(\frac{A_{sw}}{s}\right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \rightarrow 172 = \left(\frac{2 \cdot 0,31}{s}\right) \cdot 0,9 \cdot 1,35 \cdot \frac{50}{1,15} \rightarrow s = 19 \text{ cm}$$

O espaçamento deverá ainda respeitar a quantidade e os espaçamentos máximos e mínimos definidos pela norma NBR 6118:2014 no item 18.3.3.2.

## 6.2 NBR 6118:2014 – cálculo da armadura transversal com o uso da protensão:

Para este comparativo, além dos dados já considerados no enunciado do exemplo 6.1, deve-se saber: a existência de 3 cabos com 12 cordoalhas (CP-190-RB-12,7) de 7 fios ( $A_p = 11,84 \text{ cm}^2/\text{cabo}$ ), com inclinação de  $6^\circ$ , tensão no tempo infinito  $\sigma_{pt=\infty} = 935 \text{ MPa}$ , momento de flexão  $M_{sd} = 1800 \text{ kN.m}$ , excentricidade para o cabo resultante  $e = 0,2 \text{ m}$ , propriedades da seção transversal:  $A_0 = 0,474327 \text{ m}^2$ ,  $I = 0,12708359 \text{ m}^4$ ,  $y_s = 0,691052 \text{ m}$ ,  $y_i = 0,808948 \text{ m}$ ,  $W_s = 0,183899 \text{ m}^3$ ,  $W_i = 0,157097 \text{ m}^3$ .

- Esforços de protensão com **cabo parabólico** ( $e = 0,20$  m):

$$P = 93,5 \times 11,84 \times 3 = 3321,12 \text{ kN}$$

$$N = 93,5 \times 11,84 \times 3 \cos 6^\circ = 3302,93 \text{ kN}$$

$$M = N \times e = 3302,93 \times 0,20 = 660,59 \text{ kN.m}$$

- Esforço cortante atuante:

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 500 - 0,9 \cdot 3321,12 \cdot \text{sen}6^\circ = 387,56 \text{ kN}$$

**a) Verificação do esmagamento da biela de concreto:**

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot 0,88 \cdot \frac{30000}{1,4} \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 3093,04 \text{ kN}$$

$$\text{com } \alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = \left(1 - \frac{30}{250}\right) = 0,88 \text{ (} f_{ck} \text{ em MPa).}$$

Portanto,  $V_{sd} \leq V_{Rd2,I}$ , e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

**b) Cálculo da resistência complementar na treliça generalizada (flexão composta com compressão):**

- Força cortante solicitante de cálculo:

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 500 - 0,9 \cdot 3321,12 \cdot \text{sen}6^\circ = 387,56 \text{ kN}$$

- Força cortante ( $V_{c0}$ ) absorvida por mecanismos complementares ao de treliça:

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_{c0} = 0,6 \cdot 1448 \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 527,80 \text{ kN}$$

$$\text{com } f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} \rightarrow f_{ctd} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 1,44 \text{ MPa} = 1448 \text{ kN/m}^2$$

- Momento de descompressão, tração na borda inferior:

$$M_0 = W_i \cdot \left(\frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{W_i}\right) \rightarrow 0,1571 \cdot \left(\frac{3302,93}{0,4743} + \frac{3302,93 \cdot 0,2}{0,1571}\right) = 1754,60 \text{ kN.m}$$

- Cortante resistido pelo concreto na flexão composta com normal de compressão (protensão):

$$V_c = V_{c1} \cdot \left( 1 + \frac{M_0}{M_{sd,máx}} \right) \leq 2 \cdot V_{c0}$$

$$V_c = 527,80 \cdot \left( 1 + \left( \frac{1754,60}{1800} \right) \right) = \mathbf{1042,29 \text{ kN}} \leq 2 \cdot 527,80 = \mathbf{1055,60 \text{ kN}}$$

- Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c \rightarrow V_{sw} = 387,566 - 1042,29 = \mathbf{-645,73 \text{ kN} < 0}$$

Portanto, não há necessidade de armadura transversal, a não ser a mínima exigida por Norma.

### 6.3 NBR 6118:2014 – cálculo da armadura transversal com o uso da protensão:

- Esforços de protensão com **cabo reto** ( $e = 0,0 \text{ m}$ ):

$$P = 93,5 \times 11,84 \times 3 = 3321,12 \text{ kN}$$

$$N = 93,5 \times 11,84 \times 3 \cos 0^\circ = 1107,04 \text{ kN}$$

$$M = N \times e = 3302,93 \times 0,00 = 0,0 \text{ kN.m}$$

- Esforço cortante atuante:

$$V_{sd} = 1,4 \cdot 500 - 0,9 \cdot 3321,12 \cdot \text{sen}0^\circ = 700 \text{ kN}$$

#### a) Verificação do esmagamento da biela de concreto:

$$V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_{Rd2,I} = 0,27 \cdot 0,88 \cdot \frac{30000}{1,4} \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 3093,04 \text{ kN}$$

$$\text{com } \alpha_{v2} = \left( 1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) = \left( 1 - \frac{30}{250} \right) = 0,88 \text{ (} f_{ck} \text{ em MPa).}$$

Portanto,  $V_{sd} \leq V_{Rd2,I}$ . e não há perigo de esmagamento do concreto das bielas.

#### b) Cálculo da resistência complementar na treliça generalizada (flexão composta com compressão):

- Força cortante solicitante de cálculo:  $V_{sd} = 1,4 \cdot 500 - 0,9 \cdot 3321,12 \cdot \text{sen}0^\circ = 700 \text{ kN}$

- Força cortante ( $V_{c0}$ ) absorvida por mecanismos complementares ao de treliça:

$$V_{c0} = 0,6 \cdot f_{ctd} \cdot b_w \cdot d \rightarrow V_{c0} = 0,6 \cdot 1448 \cdot 0,45 \cdot 1,35 = 527,80 \text{ kN}$$

$$\text{com } f_{ctd} = \frac{0,21 \cdot f_{ck}^{2/3}}{\gamma_c} \rightarrow f_{ctd} = 0,15 \cdot \sqrt[3]{30^2} = 1,44 \text{ MPa} = 1448 \text{ kN/m}^2$$

- Momento de descompressão, tração na borda inferior:

$$M_0 = W_i \cdot \left( \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{W_i} \right) \rightarrow 0,1571 \cdot \left( \frac{1107,04}{0,4743} + \frac{1107,04 \cdot 0,0}{0,1571} \right) = 366,68 \text{ kN.m}$$

- Cortante resistido pelo concreto na flexão composta com normal de compressão (protensão):

$$V_c = V_{c1} \cdot \left( 1 + \frac{M_0}{M_{sd,m\acute{a}x}} \right) \leq 2 \cdot V_{c0}$$

$$V_c = 527,80 \cdot \left( 1 + \left( \frac{366,68}{1800} \right) \right) = 635,32 \text{ kN} \leq 2 \cdot 527,80 = 1055,60 \text{ kN}$$

- Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal:

$$V_{sw} = V_{sd} - V_c \rightarrow V_{sw} = 700 - 635,32 = 64,68 \text{ kN}$$

- Espaçamento  $s$  dos estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ ) de  $\Phi = 6,3 \text{ mm}$ :

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \rightarrow s = \left( \frac{A_{sw}}{V_{sw}} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}$$

$$s = \left( \frac{A_{sw}}{V_{sw}} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \rightarrow s = \frac{(2 \cdot 0,31)}{64,68} \cdot 0,9 \cdot 135 \cdot \frac{50}{1,15} \rightarrow s = 50,64 \text{ cm}$$

O espaçamento deverá ainda respeitar a quantidade e os espaçamentos máximos e mínimos definidos pela norma NBR 6118:2014 no item 18.3.3.2.

#### 6.4 ACI 318:2014 – cálculo da armadura transversal sem o uso da protensão:

- Esforço cortante e momento atuante:

$$V_u = 700 \text{ kN} = 70 \text{ tf}$$

$$M_u = 1800 \text{ kN.m} = 180 \text{ tf.m}$$

- Limite da resistência dos materiais, para esforço cortante não deve exceder:

$$\sqrt{f'_c} \leq 27 \text{ kgf/cm}^2 \rightarrow \sqrt{300} = 17,32 \text{ kgf/cm}^2 \leq 27 \text{ kgf/cm}^2$$

- Cálculo da força cortante no concreto, pelo método aproximado:

$$V_c = 0,53 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \rightarrow 0,53 \cdot 1 \cdot \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = \mathbf{55,77 \text{ tf}} < V_u = 70 \text{ tf}$$

---

Atribuindo uma armadura de flexão igual a 45,00 cm<sup>2</sup>, (levando em consideração a viga em concreto armado), para cálculo pelo método detalhado:

$$\frac{V_u d}{M_u} \leq 1 \rightarrow \frac{70 \text{ tf} \cdot 1,35 \text{ m}}{180 \text{ tfm}} = 0,525 \leq 1$$

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d} = \frac{45 \text{ cm}^2}{45 \text{ cm} \cdot 135 \text{ cm}} = 0,0074$$

$$V_c = \left( 0,5 \lambda \sqrt{f'_c} + 176 \rho_w \frac{V_u d}{M_u} \right) b_w d$$

$$V_c = (0,5 \cdot 1 \cdot \sqrt{300} + 176 \cdot 0,0074 \cdot 0,525) \cdot 45 \cdot 135 = \mathbf{56,76 \text{ tf}}$$

$$V_c \leq (0,5 \lambda \sqrt{f'_c} + 176 \rho_w) b_w d = 60,52 \text{ tf}$$

$$V_c \leq 0,93 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d = 97,86 \text{ tf}$$

---

- Cálculo da força cortante que deverá resistir o aço:

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c \rightarrow V_s \geq \frac{70}{0,75} - 55,77 = \mathbf{37,56 \text{ tf}}$$

$$V_s \leq 0,8 \sqrt{f'_c} b_w d \rightarrow 0,8 \cdot \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = \mathbf{84,18 \text{ tf}}$$

- Verificação da necessidade da armadura transversal, se  $V_u/\phi \leq V_c/2$ , não há necessidade de armadura transversal de acordo com o ACI:

$$\frac{V_u}{\phi} = \frac{70}{0,75} = 93,33 \text{ tf} \geq \frac{V_c}{2} = \frac{55,77}{2} = 27,89 \text{ tf}$$

Portanto, há necessidade de estribos.

- Cálculo da força cortante última:

$$V_u \leq (\phi V_c + 2,2 \sqrt{f'_c} b_w d) \rightarrow (0,75 \cdot 55,77 + 2,2 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135) = \mathbf{231,53 \text{ tf}}$$

- Cálculo dos espaçamentos dos estribos verticais ( $\alpha = 90^\circ$ )  $\phi$  6,3 mm ( $f_{yt} = 420$  MPa):

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{s} \rightarrow s = \frac{A_v f_{yt} (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{V_s}$$

$$s = \frac{A_v f_{yt} d}{V_s} = \frac{(2 \cdot 0,31) \cdot 4200 \cdot 135}{37,56 \cdot 1000} \rightarrow s = \mathbf{9,36 \text{ cm}}$$

O espaçamento deverá ainda respeitar a quantidade e os espaçamentos máximos e mínimos definidos pela norma ACI 318:2014.

## 6.5 ACI 318:2014 – cálculo da armadura transversal com o uso da protensão:

Para este comparativo, além dos dados já considerados no enunciado do exemplo 6.1, deve-se saber: a existência de 3 cabos com 12 cordoalhas (CP-190-RB-12,7) de 7 fios ( $A_p = 11,84 \text{ cm}^2/\text{cabo}$ ), com inclinação de  $6^\circ$ , tensão no tempo infinito  $\sigma_{pt=\infty} = 935$  MPa, momento de flexão  $M_{sd} = 1800$  kN.m, excentricidade para o cabo resultante  $e = 0,2$  m, propriedades da seção transversal:  $A_c = 0,4743269 \text{ m}^2$ ,  $I = 0,12708359 \text{ m}^4$ ,  $y_s = 0,6910516$  m,  $y_i = 0,8089489$  m,  $W_s = 0,1838988 \text{ m}^3$ ,  $W_i = 0,15709718 \text{ m}^3$ .

- Esforços de protensão com **cabo parabólico** ( $e = 0,2$  m):

$$P = 93,5 \times 11,84 \times 3 = 3321,12 \text{ kN} = 332,11 \text{ tf}$$

$$N = 93,5 \times 11,84 \times 3 \cos 6^\circ = 3302,93 \text{ kN} = 330,29 \text{ tf}$$

$$M = N \times e = 3302,93 \times 0,20 = 660,59 \text{ kN.m} = 66,06 \text{ tf.m}$$

- Esforço cortante e momento atuante:

$$V_u = 700 \text{ kN} = 70 \text{ tf}$$

$$M_u = 1800 \text{ kN.m} = 180 \text{ tf.m}$$

- Limite da resistência dos materiais, para esforço cortante não deve exceder:

$$\sqrt{f'_c} \leq 27 \text{ kgf/cm}^2 \rightarrow \sqrt{300} = 17,32 \text{ kgf/cm}^2 \leq 27 \text{ kgf/cm}^2$$

$$f_{yt} \leq 8000 \text{ psi} = 55 \text{ MPa}$$

- Calculo da força atuante na fibra inferior devido à protensão:

$$f_{pe} = \frac{P}{A_c} + \frac{M_d}{W_i} = \frac{332,11}{0,474327} + \frac{180}{0,157097} = \mathbf{1845,96 \text{ tf/m}^2}$$

- Calculo dos esforços devido ao carregamento:

$$f_d = \frac{M_d}{W_i} \rightarrow f_d = \frac{180}{0,157097} = \mathbf{1145,79 \text{ tf/m}^2}$$

$$M_{cre} = \left( \frac{I}{y_t} \right) (1,6 \lambda \sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d)$$

$$M_{cre} = \left( \frac{0,1270835}{0,8089489} \right) (1,6 \cdot 1 \sqrt{300} + 184,596 - 114,579) = \mathbf{153,53 \text{ tf.m}}$$

- Calculo da força cortante que gera fissuras no concreto:

$$V_p = P \text{ sen} \alpha \rightarrow 332,11 \text{ sen} 6^\circ = 34,71 \text{ tf}$$

$$f_{pc} = \frac{P}{A_p} \rightarrow \frac{332,11}{0,474327} = 700,17 \text{ tf/m}^2$$

- Determinar a força cortante para a formação de fissuras (método aproximado):

$$V_c = \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} + 49 \frac{V_d d_p}{M_u} \right) b_w d$$

$$V_c = \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} + 49 \frac{50 \cdot 1,35}{180} \right) 45 \cdot 135 = \mathbf{128,46 \text{ tf}}$$

$$V_c \leq \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} + 49 \right) b_w d$$

$$V_c \leq \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} + 49 \right) 45 \cdot 135 = \mathbf{314,51 \text{ tf}}$$

$$0,53 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1,33 \lambda \sqrt{f'_c} b_w$$

$$0,53 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = 55,77 \text{ tf} \leq \mathbf{128,46 \text{ tf}} \leq 1,33 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = 139,95 \text{ tf}$$


---

- Cálculo da força cortante que gera fissuras no concreto:

$$V_{ci} = \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}} \right)$$

$$V_{ci} = \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 + 50 + \frac{70 \cdot 153,53}{180} \right) = \mathbf{126,54 \text{ tf}}$$

$$V_{ci} \leq 0,45 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \rightarrow 0,45 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = \mathbf{47,35 \text{ tf}}$$

$$V_{cw} = \left( 0,93 \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3 f_{pc} \right) b_w d_p + V_p$$

$$V_{cw} = \left( 0,93 \cdot 1 \sqrt{300} + 0,3 \cdot 70,017 \right) 45 \cdot 135 + 34710 = \mathbf{260,17 \text{ tf}}$$

O valor de  $V_c$  é o menor entre  $V_{ci}$  e  $V_{cw}$ , portanto,  $V_c = \mathbf{126,54 \text{ tf}}$ .

- Cálculo para verificação das dimensões da seção transversal:

$$V_u \leq \phi (V_c + 2,2 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d)$$

$$70 \text{ tf} \leq 0,75 (126540 + 2,2 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135) = \mathbf{268,52 \text{ tf}}$$



- Cálculo da necessidade de armadura transversal: se  $V_u > \phi V_c$ , estribos são necessários.

$$V_u > \phi V_c \rightarrow 70 \text{ tf} < 0,75 \cdot 126,54 = \mathbf{94,91 \text{ tf}}$$

Portanto, não há necessidade de armadura transversal, a não ser a mínima exigida por Norma.

### 6.6 ACI 318:2014 – cálculo da armadura transversal com o uso da protensão:

Para este comparativo, além dos dados já considerados no enunciado do exemplo 6.1, deve-se saber: a existência de 3 cabos com 12 cordoalhas (CP-190-RB-12,7) de 7 fios ( $A_p = 11,84 \text{ cm}^2/\text{cabo}$ ), com inclinação de  $6^\circ$ , tensão no tempo infinito  $\sigma_{pt=\infty} = 935 \text{ MPa}$ , momento de flexão  $M_{sd} = 1800 \text{ kN.m}$ , excentricidade para o cabo resultante  $e = 0,2 \text{ m}$ , propriedades da seção transversal:  $A_c = 0,4743269 \text{ m}^2$ ,  $I = 0,12708359 \text{ m}^4$ ,  $y_s = 0,6910516 \text{ m}$ ,  $y_i = 0,8089489 \text{ m}$ ,  $W_s = 0,1838988 \text{ m}^3$ ,  $W_i = 0,15709718 \text{ m}^3$ .

- Esforços de protensão com **cabo reto** ( $e = 0,0 \text{ m}$ ):

$$P = 93,5 \times 11,84 \times 3 = 3321,12 \text{ kN} = 332,11 \text{ tf}$$

$$N = 93,5 \times 11,84 \times 3 \cos 0^\circ = 1107,04 \text{ kN} = 110,70 \text{ tf}$$

$$M = N \times e = 3302,93 \times 0,00 = 0,0 \text{ kN.m} = 0,0 \text{ tf.m}$$

- Esforço cortante e momento atuante:

$$V_u = 700 \text{ kN} = 70 \text{ tf}$$

$$M_u = 1800 \text{ kN.m} = 180 \text{ tf.m}$$

- Cálculo da força atuante na fibra inferior devido à protensão:

$$f_{pe} = \frac{P}{A_c} + \frac{M_d}{W_i} = \frac{332,11}{0,474327} + \frac{180}{0,157097} = \mathbf{1845,96 \text{ tf/m}^2}$$

- Cálculo dos esforços devido ao carregamento:

$$f_d = \frac{M_d}{W_i} \rightarrow f_d = \frac{180}{0,157097} = \mathbf{1145,79 \text{ tf/m}^2}$$

$$M_{cre} = \left( \frac{I}{y_t} \right) \left( 1,6 \lambda \sqrt{f'_c} + f_{pe} - f_d \right)$$

$$M_{cre} = \left( \frac{0,1270835}{0,8089489} \right) (1,6 \cdot 1\sqrt{300} + 184,596 - 114,579) = \mathbf{153,53 \text{ tf} \cdot \text{m}}$$

- Calculo da força cortante que gera fissuras no concreto:

$$V_p = P \operatorname{sen} \alpha \rightarrow 332,11 \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \text{ tf}$$

$$f_{pc} = \frac{P}{A_p} \rightarrow \frac{332,11}{0,474327} = 700,17 \text{ tf/m}^2$$

- Determinar a força cortante para a formação de fissuras (método aproximado):

$$V_c = \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} + 49 \frac{V_d d_p}{M_u} \right) b_w d$$

$$V_c = \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} + 49 \frac{50 \cdot 1,35}{180} \right) 45 \cdot 135 = \mathbf{128,46 \text{ tf}}$$

$$V_c \leq \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} + 49 \right) b_w d$$

$$V_c \leq \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} + 49 \right) 45 \cdot 135 = \mathbf{314,51 \text{ tf}}$$

$$0,53 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \leq V_c \leq 1,33 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$$

$$0,53 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = 55,77 \text{ tf} \leq \mathbf{128,46 \text{ tf}} \leq 1,33 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = 139,95 \text{ tf}$$


---

- Calculo da força cortante que gera fissuras no concreto:

$$V_{ci} = \left( 0,16 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d_p + V_d + \frac{V_i M_{cre}}{M_{max}} \right)$$

$$V_{ci} = \left( 0,16 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 + 50 + \frac{70 \cdot 153,53}{180} \right) = \mathbf{126,54 \text{ tf}}$$

$$V_{ci} \leq 0,45 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d \rightarrow 0,45 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135 = \mathbf{47,35 \text{ tf}}$$

$$V_{cw} = \left( 0,93 \lambda \sqrt{f'_c} + 0,3 f_{pc} \right) b_w d_p + V_p$$

$$V_{cw} = (0,93 \cdot 1 \sqrt{300} + 0,3 \cdot 70,017) \cdot 45 \cdot 135 + 0 = \mathbf{225,46 \text{ tf}}$$

O valor de  $V_c$  é o menor entre  $V_{ci}$  e  $V_{cw}$ , portanto,  **$V_c = 126,54 \text{ tf}$** .

- Cálculo para verificação das dimensões da seção transversal:

$$V_u \leq \phi(V_c + 2,2 \lambda \sqrt{f'_c} b_w d)$$

$$70 \text{ tf} \leq 0,75(47350 + 2,2 \cdot 1 \sqrt{300} \cdot 45 \cdot 135) = \mathbf{209,13 \text{ tf}}$$

- Cálculo da necessidade de armadura transversal: se  $V_u > \phi V_c$ , estribos são necessários.

$$V_u > \phi V_c \rightarrow 70 \text{ tf} < 0,75 \cdot 126,54 = \mathbf{94,91 \text{ tf}}$$

Portanto, não há necessidade de armadura transversal, a não ser a mínima exigida por Norma.

## 7. Análises normativas

O método do ACI 318:2014, é baseado na média das tensões de cisalhamento e na profundidade total da seção transversal  $b_w d$ . A parcela  $V_c$  na protensão, deve ser o menor valor entre  $V_{ci}$  e  $V_{cw}$  que são, respectivamente, ruína por flexo-cisalhamento (ACI-FS) e ruína por cisalhamento na alma (ACI-WS). Além da contribuição do concreto, também é levado em consideração a parcela referente à armadura de cisalhamento  $V_s$ .

O método não considera, diretamente, a contribuição da componente horizontal  $V_p$ . A protensão é levada em consideração por meio de um momento que anula o momento solicitante de cálculo, que depende da excentricidade do cabo de protensão em relação à linha neutra. Já o método baseado no modo de ruptura por cisalhamento na alma (ACI-WS), o efeito favorável da componente vertical é levado em consideração na equação.

A NBR 6118:2014 considera duas formulações de cálculo baseado no modelo de treliça e no esgotamento das diagonais tracionadas e comprimidas. O Modelo I considera a inclinação da biela de  $45^\circ$  e inclinação dos estribos entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ . O Modelo II considera a inclinação da biela variando entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$  e a mesma variação da inclinação dos estribos para o modelo I. O efeito favorável da protensão é levado em consideração na relação entre o momento fletor que anula as tensões normais de compressão na borda da seção ( $M_0$ ), e o momento fletor de cálculo, máximo no trecho em análise, que pode ser tomado como o maior valor do semi-tramo considerado.

A tendência contra a segurança das estimativas das normas NBR 6118:2014 e ACI 318:2014, ou seja, empregando o Modelo II da NBR 6118:2014 e a equação da ACI 318:2014, que considera a predominância do cisalhamento na alma (ACI-WS), pode estar associadas à imprecisão teórica e/ou experimental na consideração da inclinação da biela ( $30^\circ$ ) e da componente vertical da protensão, respectivamente. Entretanto, estas normas recomendam que sejam adotados os menores valores, resultando que as suas estimativas foram precisas, ou seja, o Modelo I da NBR 6118 e as considerações para o flexo-cisalhamento da ACI (ACI-FS).

## 8. Conclusão

Vários aspectos do desenvolvimento do sistema protendido foram discutidos neste artigo, como a contribuição da protensão e do traçado do cabo na resistência ao cisalhamento de vigas, a influência da protensão na redução de flechas e fissuras, as deformações das armaduras transversais, longitudinais e no concreto além de comparações dos resultados experimentais com os resultados estimados pelas normas ACI 318:2014 e da NBR 6118:2014. Para os resultados experimentais apresentados é possível concluir que o traçado parabólico do cabo elevou em até 16% a resistência ao cisalhamento das vigas, com ou sem estribos. Já as estimativas normativas divergiram entre si com alguns resultados contra a segurança, mas ainda próximos e coerentes com os resultados experimentais obtidos nesta pesquisa. Ressalta-se a necessidade de mais experimentos e análises criteriosas (computacional, banco de dados, etc.) para viabilizar o melhor entendimento do problema e uma avaliação mais justa das estimativas normativas.

## 9. Referências

- ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas, "Projeto e execução de fundações", NBR 6122. Rio de Janeiro, 2010.
- ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. NBR 6118. Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014.
- ACI 318. Building Code Requirements for Structural Concrete, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 2014.
- ACI-ASCE Committee 426 (1973). The Shear Strength of Reinforced Concrete Members. In: Journal of the Structural Division, Vol. 99, N° ST6, June, 1973, pp. 1091-1187.
- AGOSTINI, Luiz R. S. Concreto protendido: estudo das vigas isostáticas. Ed. Livraria Ciência e Tecnologia. São Paulo, 1983.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS - ABNT. Projeto de estruturas de concreto: procedimento: NBR 6118: 2014. Rio de Janeiro, 2014.
- BASTOS, Paulo Sergio dos Santos. Concreto Protendido: Disciplina 2139, Concreto Protendido, Notas de Aula. UNESP, Campus de Bauru, São Paulo, 2015.
- BUCHAIM, R, Concreto Protendido: Tração axial, Flexão simples e Força cortante. Editora da Universidade Estadual de Londrina (EDUEL), Londrina-PR, 2007.
- CARVALHO R. C; FIGUEIREDO FILHO J. R. Estruturas em concreto protendido: cálculo e detalhamento. São Paulo: PINI, 2012.
- EMERICK, A. A. Projeto e execução de lajes protendidas. Ed. Interciência. Rio de Janeiro, 2005.
- HANAI, João Bento De. Fundamentos do Concreto Protendido. São Carlos, 2005.
- LASKAR. A, HSU T.T.C, MO. Y. L. Shear Strengths of Prestressed Concrete Beams Part 1: Experiments and Shear Design Equations. ACI Structural Journal, May-June, 2010.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado. vol. 4. Rio de Janeiro, Interciência, 1977.

MACGREGOR, J. G., Strength and Behavior of Prestressed Concrete Beams with Web Reinforcement. PhD thesis, University of Illinois, July, 1960.

NAAMAN, A. E. Prestressed Concrete. Analysis and Design: Fundamentals. 2<sup>o</sup> Edition, 2004.

VERÍSIMO, Gustavo de Souza; JUNIOR, Kléos M Lenz César. Concreto Protendido: Fundamentos Básicos. 4 ed. UFV Viçosa, 1998.

NIELSEN, M. P. Limit analysis and concrete plasticity. 2. Ed. Boca Raton: CRC Press, 1998

KIRMAIR, K. Das Schubtragverhalten schlanker Stahlbetonbalken. Theoretische und experimentelle Untersuchungen für Leicht- und Normalbeton. Juli 1985. Dissertation, Technische Universität München.